

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

41. Band, Heft 1/3

1. April 1952

S. 1—144

Geschichte.

● **Dijksterhuis, E. J.:** *Die Mechanisierung des Weltbildes.* (Wetensch. Wijsg. Bibl.) Amsterdam: J. M. Meulenhoff 1950. IX, 590 S. fl. 18,50 [Holländisch].

Verf. legt in diesem umfassenden Werk das Ergebnis seiner jahrzehntelangen tiefgreifenden Studien über die Entwicklung der naturwissenschaftlichen und naturphilosophischen Ansichten von den Griechen bis zum Spätbarock in konzentrierter Form vor. Er bietet dem Fernerstehenden einen Überblick über die größeren Zusammenhänge, zu dem nähere Ausführungen über kennzeichnende Beispiele treten; der Fachmann findet in zahlreichen Noten, einer umfangreichen Übersicht über das Schrifttum und einem sehr sorgfältig gearbeiteten Namenregister alle nur wünschenswerten Hinweise auf die einschlägige Original- und Zweitliteratur. Da wir keine gleichwertige Darstellung in deutscher Sprache besitzen, wäre eine Übersetzung des gediegenen Werkes, das in schlichter, wohldurchdachter Sprache das umfangreiche Material in großzügiger Überschau behandelt, sehr erwünscht.

Aus der Inhaltsübersicht: I. Das Erbgut der Antike: a) Hauptströmungen der griechischen Naturphilosophie: Pythagoreer, Eleaten, Korpuskulartheorie, Platon, Aristoteles, die Stoiker, die Neuplatoniker. b) Die Fachwissenschaften: Mathematik, mathematische Physik, Astronomie, Physik, Technik, ästhetisch-axiologisch-teleologische Anschauungen, Chemie, Astrologie. c) Frühchristliche Stellungnahme zur Naturwissenschaft. — II. Die Naturwissenschaften im Mittelalter: a) Übergangszeit: antike Tradition, Gerbert, Schule von Chartres. b) Islam. c) XII. Jh.: naturwissenschaftliche Regungen, Adelhard v. Bath und Wilhelm v. Conches, Alanus ab Insulis. d) XIII. Jh.: Eindringen des Aristotelismus, der Thomismus, Roger Bacon, das Vacuum-Problem, Optik, Magnetismus, Astrologie, Magie, Alchemie. e) XIV. Jh.: Kritik und Zweifel, Nikolaus v. Autrecourt, Physik, Astronomie. — III. Die klassische Naturwissenschaft im Entstehen: a) Humanismus und Renaissance in ihrer Stellung zur Naturwissenschaft: Humanismus, Nikolaus v. Cues, Naturphilosophie der Renaissance. b) Die Technik als Anregerin naturwissenschaftlichen Denkens. c) Mechanik: Jordanus und seine Schule, Leonardo da Vinci, die Pariser Schule im XVI. Jh. d) Astronomie. e) Struktur der Materie: minima naturalia, Paracelsus. — IV. Geburt der klassischen Naturwissenschaft: a) Astronomie: Copernicus, Brahe, Kepler. b) Mechanik: Stevin, Beeckman, Galilei und seine Schule, Kraftbegriff, Huygens, Galileis Auseinandersetzung mit der Kirche. c) Physik; Chemie und Naturphilosophie: Hydrostatik, geometrische Optik, Gilbert, Bacon, Descartes, Korpuskulartheorie, Mechanisierung der Qualitäten, Boyle, Lehre von den Gasen, die Mechanisierung auf dem Höhepunkt (Huygens), Newton.

Joseph Ehrenfried Hofmann.

● **Dugas, R.:** *Histoire de la mécanique.* Neufchatel: Édit. La Baconnière 1950.

● **Laue, Max von:** *History of physics.* — Transl. by R. Oesper. New York: Academic Press 1950. \$ 2,30.

● **Abetti, Giorgio:** *Storia dell'Astronomia.* Firenze: Vallecchi Editore 1949.

XII, 370 p. L. 1800,—.

Seit den Arbeiten von Schiaparelli sind größere Werke über die Geschichte der Astronomie in italienischer Sprache nicht erschienen, obwohl der Beitrag Italiens zur Entwicklung dieser Wissenschaft und unseres modernen Weltbildes sehr bedeutend gewesen ist. Man braucht dabei nicht nur an Galilei und andere bedeutende Gelehrte des 17. Jahrhunderts, wie Cassini, zu denken — auch in unseren Tagen werden auf mehr als einem Dutzend italienischer Sternwarten wichtige Arbeiten geleistet, die zu den großen Fortschritten der astronomischen Wissenschaft in den letzten hundert Jahren nicht unwesentlich beigetragen haben. Das Buch von Abetti, dem Leiter der Sternwarte in Arcetri bei Florenz, füllt daher eine Lücke im kulturhistorischen Schrifttum aus. — In der Einteilung des Werkes benutzt der Verf. noch das seit Oswald Spengler etwas überholte Schema Altertum-Mittelalter-Neuzeit, wobei er allerdings die moderne Entwicklung der Astronomie noch in die Zeit der großen Reformen (1517—1727), die Zeit des Fortschritts unter Herschel, Gauß, Bessel und Struve, die Entwicklung und Vollendung der Himmelsmechanik im 19. Jahrhundert und schließlich die moderne Epoche mit dem Aufstieg der Astrophysik unterteilt. Demgegenüber ist die antike Astronomie, die auch einen kurzen Abriß der astronomischen Leistungen der Chaldäer, Ägypter, Hebräer, Phönizier, Inder und Chinesen,

sowie der mittelamerikanischen Völker umfaßt, verhältnismäßig kurz gehalten. Auch die Astronomie des Mittelalters ist auf 18 Seiten zusammengedrängt. Hingegen ist die klassische Zeit von Kopernikus bis Laplace recht ausführlich behandelt — wie man von einem italienischen Werk erwarten mußte, enthält besonders das Kapitel über Galilei und auch das über Kopernikus, der ja während seines langjährigen Studienaufenthaltes in Bologna viele Anregungen in Italien empfangen hat, manche historische Einzelheit, die man in anderen geschichtlichen Werken nicht findet. — Den Abschluß des eigentlichen Werkes bildet ein Kapitel über die internationale Zusammenarbeit in der astronomischen Forschung, die insbesondere durch die 1922 gegründete Internationale Astronomische Union gepflegt wird. — In einem Anhang werden die italienischen Sternwarten einschließlich der Specola Vaticana und ihre Arbeiten und Verdienste ausführlich gewürdigt. Das von dem Verlag Vallecchi gut ausgestattete Werk enthält 32 Bildtafeln — zum Teil moderne Photographien von Sternwarten und Instrumenten (darunter eine sehr eindrucksvolle Aufnahme der Kuppel des 5-Meter-Spiegels auf dem schneebedeckten Mt. Palomar), zum Teil auch interessante Bilder und Faksimiledrucke aus italienischen Museen und Archiven, die man sonst kaum zu Gesicht bekommt. Ein sehr reichhaltiges Namenverzeichnis bildet den Abschluß.

Karl Stumpff.

● **Runge, Iris: Carl Runge und sein wissenschaftliches Werk.** (Abh. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., III. Folge, Nr. 23.) Göttingen: Vandenhoeck & Rupprecht 1949. 214 S. DM 13,00.

Runges Biographie, geschrieben mit großer Sachkenntnis und mit feinem menschlichen Verständnis, ist für viele Freunde und Schüler eine unschätzbare Erinnerung an einen bedeutenden Gelehrten und edlen Menschen. Aber ganz abgesehen vom biographischen Interesse ist das Buch ein Dokument, welches wichtige Fragen für die Gegenwart und Zukunft der Wissenschaft beleuchtet. — Jeder Leser, der sich für die soziologischen Bedingungen interessiert, auf denen wissenschaftliches Leben noch vor wenigen Jahrzehnten beruht hat, wird in dem Buch interessanten Aufschluß finden. Ein junger Mann aus wohlhabender Familie genießt die beste Erziehung und Universitätsausbildung, welche in der Welt existierte, er braucht sich nicht mit materiellen oder mit moralischen oder politischen Problemen herumzuschlagen und entwickelt seine hervorragenden Gaben, menschlich und wissenschaftlich, mit einer ungehemmten Stetigkeit, welche der heutigen Generation wie ein Märchentraum erscheinen muß. Bis zu seinem Tode bleibt sein Leben in harmonischem Gleichgewicht zwischen Lernen, Forschen, Lehren, in freundschaftlicher Verbindung mit vielen großen Wissenschaftlern. Als ein Bild einer versunkenen Vergangenheit hat das Buch eine Bedeutung durch den Kontrast mit der Situation, in welcher sich die Wissenschaft und ihre jungen Vertreter heute finden, abhängig von Mächten, deren letztes Interesse nicht die Erkenntnis der wissenschaftlichen Wahrheit ist. — Der zweite wichtige Punkt, welchen der Leser in dem Buch berührt findet, ist das Verhältnis zwischen theoretischer und angewandter Mathematik. Runge verkörperte für seine Epoche den systematischen Versuch, dieses Verhältnis im akademischen Leben wieder zu balancieren, nachdem seit Gauß' Tode die angewandte Seite der Mathematik mehr und mehr in den Schatten gegliitten war. Als erfolgreicher Schüler von Weierstraß und Kronecker, als Freund von Mittag-Leffler begann Runge seine Laufbahn auf theoretischer Basis, geriet dann in den Bann der Experimentalphysik und machte entscheidende Beiträge in der Spektroskopie, beschäftigte sich theoretisch und experimentell mit optischen Instrumenten und nahm lebhaften Anteil an der Entwicklung der Aerodynamik, an Problemen der Geodäsie und an anderen Fragen der Physik und Mechanik, in welchen der Gesichtspunkt des Mathematikers eine Rolle spielen konnte. Als unter Kleins Einfluß der erste Lehrstuhl für angewandte Mathematik in Göttingen errichtet wurde, wurde selbstverständlich Runge berufen. Runges lange Wirksamkeit als Lehrer und Forscher in Göttingen hat viel dazu beigetragen, die Verbindung zwischen theoretischer und angewandter Mathematik zu stärken. Trotzdem hat die Göttinger Fakultät, mit Runges Einverständnis, nach seiner Emeritierung das Kleinsche Programm einer akademischen Trennung zwischen reiner und angewandter Mathematik aufgegeben; die nächste Generation muß von neuem die Frage beantworten, wie den Gesichtspunkten der Anwendungen der nötige Spielraum in der Mathematik gegeben werden soll. Überall in der Welt ist diese Aufgabe dringend geworden. Überall hat man erkannt, daß eine wirkliche Trennung zwischen theoretischer und angewandter Mathematik für unsere Zeit unfruchtbar wäre und daß es auf die Erziehung von vielseitig interessierten wissenschaftlichen Persönlichkeiten ankommt, ohne Rücksicht auf dogmatische Facheinteilungen. Runges Biographie ist eine Quelle, aus der man viel über dieses Problem lernen kann. — Das ausgezeichnet geschriebene Buch verdient eine viel größere Verbreitung, als es anscheinend während des ersten Jahres nach seinem Erscheinen gefunden hat.

Richard Courant.

Professor Boris Jakovlevič Bukreev. (Zum 90sten Geburtstag und zur 65jährigen Tätigkeit in Wissenschaft und Pädagogik.) Ukrain. mat. Ž. 2, Nr. 1, 3—9 (1950) [Russisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Tietze, Heinrich: Dem Andenken an C. Carathéodory. S.-B. Bayer. Akad. Wiss., München, math.-naturw. Abt. 1950, 85—101 (1950).

Kubota, Tadahiko: Obituary note. Matsusaburô Fujiwara (1881—1946). Tôhoku math. J., II. Ser. 1, 1—2 (1949).

Kubota, Tadahiko: The list of mathematical papers. Tôhoku math. J., II. Ser. 1, 3—13 (1949).

• **Čebotarev, N. G.:** Gesammelte Abhandlungen. Bd. 3. Moskau: Verlag der Akad. der Wissenschaften 1950, 171 S. [Russisch].

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Nevanlinna, Rolf: Leitende Gesichtspunkte in der Entwicklung der Mathematik. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 95, 1—22 (1950).

Die Abhandlung gibt den Inhalt eines Vortrags wieder, den Verf. am 7. 11. 49 in der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich gehalten hat. Er wendet sich an Zuhörer ohne mathematische Spezialausbildung und versucht unter Verzicht auf Einzelheiten gewisse allgemeine Wesenszüge der Mathematik und ihrer Methoden klar zu machen. Insbesondere behandelt er die Begriffsbildung durch Abstraktion, die eigenartige Struktur der Systeme mathematischer Objekte, die Gewinnung von Erkenntnissen auf empirischem und deduktivem Weg und die spezifische Arbeitsmethode der mathematischen Forschung durch mathematisch-logische Reduktion. Dieser Reduktionsprozeß, der die Grundlage für die Möglichkeit der Anwendung der mathematischen Beweismethode innerhalb eines mathematischen Systems schafft, wird genauer diskutiert (Widerspruchslosigkeit, Unabhängigkeit der Grundsätze, Einführung idealer Elemente, Prinzip der Permanenz der Regeln u. ä.). Weiter werden die Methoden der Verallgemeinerung, der Abbildung und in Verbindung damit die Begriffe der Funktion und der Invarianz erläutert. Abbildung und Invarianz führen zum Verständnis der Anwendbarkeit der Mathematik auf solche Gebiete, die außerhalb des Begriffssystems der mathematischen Theorien liegen, und zur Frage nach den Grenzen der Möglichkeiten der mathematischen Methode. Dabei weist Verf. darauf hin, daß der Kulturmensch in weiterem Umfang, als es ihm bewußt ist, seine allgemeinen Vorstellungen und Auffassungen im Einklang mit Grundsätzen bildet, die in der mathematischen Forschung zu bewußten leitenden Prinzipien gestaltet werden. — Die Abhandlung bringt zwar nichts grundsätzlich Neues, zeigt aber die Wesenszüge und Leitideen mathematischer Forschung von hoher Warte auf. Sie gibt dem Nichtmathematiker in leicht verständlicher Weise eine Vorstellung von der geistigen Arbeit des mathematischen Forschers und ist geeignet, den letzteren zur Besinnung über die von ihm täglich verwendeten Methoden und ihre Tragweite anzuregen.

Eugen Löffler.

• **Feys, R.:** Die Entwicklung des logischen Denkens. Herausgegeben von A. Borgers. (Philosophische Bibliothek.) Antwerpen: Standaard-Boekhandel; Nijmegen: Dekker & van de Veegt 1949. 220 p. fr. 180,— [Holländisch].

Das Buch enthält eine teilweise Wiedergabe von Vorlesungen, die Verf. im Studienjahr 1946/47 an der Universität Löwen gehalten hat. Er will in großen Zügen den Ursprung und die neuen Entwicklungen und Verzweigungen der Logistik beschreiben. Dabei setzt er voraus, daß der Leser die Logistik, wenigstens in ihren modernen Erscheinungen, nicht kennt. Deshalb gibt er da und dort einen Überblick über diese neuen Theorien mit Begriffserklärungen, zum Teil auch mit Beweisen. So entstand ein eigenartiges Mittelding zwischen der Darstellung logisch-mathematischer Theorien und der Beschreibung ihrer geschichtlichen Entwicklung. Das Buch kann also als Einleitung zu einem Lehrbuch der Logistik dienen, ohne aber ein solches zu ersetzen. Es gibt somit einerseits mehr als sein Titel vermuten läßt; andererseits gibt es aber auch weniger. Denn es beschränkt sich im wesentlichen auf die Geschichte der Formallogik (der Logistik), deren wissenschaftliches Vorbild in Aufbau und Sprache die Mathematik ist, d. h. also auf die Entwicklung der letzten 100 Jahre seit dem Auftreten von G. Boole und E. Schröder. — Nach einer kurzen Einleitung, in der Zweck und Ziel des Buches erläutert werden, wird im ersten Abschnitt (S. 16—40) die klassische Logik und ihre Entwicklungsgeschichte von Aristoteles bis zur Gegenwart kurz skizziert. Der 2. Abschnitt (S. 41—90) behandelt den Logikkalkül, insbesondere die Klassenlogik und die Aussagenlogik. Der 3. Abschnitt (S. 91—150) beschäftigt sich mit der formalisierten, zweiwertigen Logik der Principia Mathematica von A. N. Whitehead und B. Russell und bringt im einzelnen Kapitel über den Formalisierungsprozeß, die eigentliche und erweiterte Aussagenlogik, die Logik der Klassen und Relative, die Antinomien der formalen Logik. Der 4. Abschnitt (S. 151—187) ist den nicht-zweiwertigen Logiken, insbesondere den Aristotelischen Modalitäten, den mehrwertigen Logiken, den Logiken des Intuitionismus und der kombinatorischen Logik gewidmet. Der 5. Abschnitt endlich (S. 188—207) handelt von den metalogischen Theorien. Verf. versteht darunter solche Theorien, die logische Behauptungen

und Hypothesen untersuchen, nicht aber solche Thesen deduktiv aufbauen und die deshalb nicht in demselben Sinn und in demselben Grad „logisch“ sind wie die in den vorhergehenden Abschnitten behandelten Theorien. Es handelt sich hier um Teilgebiete der noch wenig entwickelten Wissenschaft von den Zeichen, der „Semiotik“, nämlich um die Syntax, die die Regeln für die Handhabung der Symbole formuliert, die Semantik, die die Beziehung zwischen Zeichen und Objekten behandelt, und die Pragmatik, die sich mit den Regeln vom Gebrauch der Symbole befaßt. — Das Werk, das manche Berührungspunkte mit E. W. Beths Philosophie der Mathematik (Antwerpen 1948, dies. Zbl. 33, 339) aufweist, ist klar geschrieben und gibt nicht nur eine gute Einleitung in die moderne Logik, sondern vermittelt auch dem Kenner wertvolle Einsichten. Verf. zeigt im Aufbau des Werkes großes pädagogisches Geschick. Er versucht stets zu klaren Begriffsbildungen zu kommen, was wegen der relativen Wortarmut des Niederländischen im Vergleich mit dem Deutschen und Englischen nicht ganz einfach ist. Er geht stets von guten Beispielen aus und übersetzt die Formeln meistens auch in die gewöhnliche Sprache. Zahlreiche Hinweise auf die einschlägige Literatur aller Völker regen zur Vertiefung an. Der Wert als Lehrbuch wird dadurch etwas beeinträchtigt, daß ein alphabetisches Sach- und Namensverzeichnis fehlt (das ausführliche Inhaltsverzeichnis, S. 208–220, ist kein Ersatz), daß kein systematisches Literaturverzeichnis beigegeben ist und daß die Zitate der erwähnten Bücher an bibliographischer Genauigkeit zu wünschen übrig lassen.

Eugen Löffler.

Mihailescu, Eugen Gh.: Untersuchungen über Untersysteme im Aussagenkalkül. Studii Cerc. mat., Acad. Republ. popul. Române, Inst. Mat. 2, 1–33, russische Zusammenfassg. 34–38 und französ. Zusammenfassg. 39–44 (1950) [Rumänisch].

Es seien N, C, E, K, A und R Funktoren des zweiwertigen Aussagenkalküls mit den Bedeutungen: Negation, Implikation, Äquivalenz, Konjunktion, Alternative bzw. Reziprozität = Non-Äquivalenz; $S(C), S(\dots)$ seien die durch die angegebenen Funktoren bestimmten Formelmengen, $L(C), L(\dots)$ die entsprechenden durch die zweiwertigen Matrizen bestimmten Satzmenngen. Verf. gibt in bezug auf die üblichen Regeln der Einsetzung und Abtrennung (diese für die Funktoren C und E , soweit sie vorkommen) semantisch vollständige Axiomensysteme an für $L(E), L(E, N), L(E, R), L(E, R, N), L(C), L(C, A), L(C, K), L(C, E, A), L(C, E, K), L(C, E, A, K), L(C, E, A, K, R, N), L(E, A), L(E, A, R)$. Diese Systeme sind auch vollständig im Postschen Sinne, außer denen für $L(E, N), L(E, R), L(E, R, N), L(E, A, R)$, wo durch Adjunktion einer identisch falschen Formel nicht jede Formel ableitbar wird. Soweit für die Beweise nicht auf Arbeiten von Łukasiewicz, Sobociński und frühere des Verf. verwiesen wird, beruhen sie auf Sätzen über spezielle Normalformen.

Gisbert Hasenjaeger.

Janiczak, Antoni: A remark concerning decidability of complete theories. J. symbolic Logic 15, 277–279 (1950).

Ist in einer formalisierten Theorie (a) die Menge A der Ausdrücke entscheidbar, (b) die Menge S der Sätze aufzählbar (d. h. axiomatisierbar), (c) die Menge N der Nicht-Sätze aufzählbar, so ist S entscheidbar (einfache Anwendung eines Theorems von Post). Offenbar läßt sich die Voraussetzung (c) ersetzen durch (c') „Für jeden Ausdruck H der Theorie gilt: Es ist entweder H oder $\sim H$ beweisbar; die (endlich oder aufzählbar vielen) Schlußrelationen sind entscheidbar; die Negationsbildung ist berechenbar“.

W. Markwald.

Matsumoto, Kazuo: Sur la structure concernant la logique moderne. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part I 2, 67–78 (1950).

In the first part of this paper the author considers a Boolean algebra which, in addition to the operation of Boolean complementation, denoted by c , contains the closure operation denoted by a . As axioms of closure he takes $X^{aa} = X^a$, $X \cap X^{ac} = 0$, $(X \cup Y)^a = X^a \cup Y^a$, $0^a = 0$. The resulting system is called T . He then constructs the system L in which the operation K is added to the Boolean operation c . The system is then characterised by the axioms $X \cap X^K = 0$, $X^K \cup X^{KK} = I$, $(X \cup Y)^K = X^K \cup Y^K$. It is then shown that L is equivalent to a system which is a Boolean algebra, in which to every element X there corresponds an element X^K , which is closed with respect to the operation K and which satisfies the axioms $(X \cup Y)^K = X^{KK} \cup Y^{Kc} \cup Y$, $0^K = I$. It is then shown that the system B^* in which the last two axioms are replaced by the axiom $X \cup X^K = I$ is equivalent to Boolean algebra and that

the system T^* in which they are replaced by the axiom $X^{Kc} \cup X^{KcK} = I$ is equivalent to T . It is shown that in T^* the following relations hold: $X^K = X^{KcK}$, $X^K \subseteq X^c$, $X^{KK} = X^{KKKK}$, $X \subseteq Y \rightarrow X^K \supseteq Y^K$, $(X \cup Y)^{KKK} = X^{KKK} \cup Y^{KKK}$, $X^{KK} \subseteq X^{Kc}$. It is then shown that in L the above relations hold in addition to the relations $X \subseteq X^{KK}$, $X^K = X^{KKK}$, $X^{KK} = X^{Kc}$. — In the second part of the paper the author considers modality and intuitionism in L . He represents material, strict and intuitionistic implication by $(X \cap Y)^c$, $(X \cap Y)^K$, $(X \cap Y)^N$ respectively, where N is an abbreviation for cKc . Logical possibility is represented by X^{Kc} . It is shown that under this interpretation all the axioms of the Lewis system $S5$ hold. It is also shown that the axioms of Heyting's system hold under this interpretation. — In the third part of the paper the author gives a decision method for the Lewis systems $S4$ and $S5$ and for the Heyting system. It is shown that a necessary and sufficient condition for a formula to be provable in $S4$ or $S5$ is that its algebraic representative is equal to I in T^* or L respectively. If in the Heyting system negation is represented by X^N a necessary and sufficient condition that a formula be provable in the system is that its algebraic representative be equal to I in L . — In the last part of the paper the author proves that the function with the same meaning as $\sim p \vee \sim q \vee \sim \phi \vee \sim \psi$ can be taken as a Sheffer function for $S4$ or $S5$. This seems similar to a result proved by Sören Halldén about the same time (this Zbl. 37, 295). The author states in a footnote that his results have been obtained independently by McKinsey and Tarski (this Zbl. 37, 294).

Alan Rose.

Matsumoto, Kazuo: On a lattice relating to the intuitionistic logic. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part I 2, 97—107 (1950).

In the first part of this paper the author gives some characterisations of a pseudo-complemented distributive lattice, i. e. a distributive lattice with the operation $*$ satisfying $x \cap y = 0 \Rightarrow y \subseteq x^*$. He shows that the above postulate about the operation $*$ can be replaced by any of the following axiom systems: (A) $x \cap x^* = 0$, $x \cap y = 0$ implies $y \subseteq x^*$; (A') $x \cap x^* = 0$, $x \cap y \subseteq z$ implies $x \cap z^* \subseteq y^*$, $0^* = I$; (A'') $x \cap y \subseteq z$ implies $x \cap z^* \subseteq y^*$, $0^* = I$, $I^* = 0$. He then considers the effect of adding the axiom $x \cup x^* \cup x^{**} = I$. He shows that the resulting lattice can be characterised by any of the following axiom systems: (B) $x \cap y = 0 \Rightarrow y \subseteq x^*$, $x^* \cup x^{**} = I$; (B') $x \cap x^* = 0$, $(x \cap y)^* = x^* \cup y^*$, $0^* = I$; (B'') $x \cap x^* = 0$, $x \cap y \subseteq z$ implies $x \cap z^* \subseteq y^*$, $0^* = I$, $x^* \cup x^{**} = I$; (B''') $x \cap x^* = 0$, $x^* \cup x^{**} = I$, $(x \cap y)^* = x^* \cup y^*$; (B'V) $x \cap x^* = 0$, $x^* \cup x^{**} = I$, $(x \cup y)^* = x^* \cap y^*$, $x^* = 0$ implies $(x \cap y)^* = y^*$. He then shows that the lattice L characterised by the postulates $x \cap x^* = 0$, $x^* \cup x^{**} = I$, $(x \cup y)^* = x^* \cap y^*$, $(x \cap y)^{**} = x^{**} \cap y^{**}$ satisfies the postulates of axiom system (A) and that every lattice characterised by axiom system (B) satisfies the postulates of L . In the lattice L the equation $(x \cap y)^* = x^* \cup y^*$ does not hold and in the lattices characterised by axiom system (A) the equation $x^* \cup x^{**} = I$ does not hold. — In the second part of the paper the author considers a lattice which is in a certain sense equivalent to Heyting's Intuitionistic Propositional Calculus. He shows that under suitable definitions of negation, alternation, conjunction and implication a lattice \tilde{L} in which the elements take only three different values 0 , I and a is equivalent to the Heyting system. Alan Rose.

Lombardo-Radice, Lucio: Ordinali transfiniti e principio del terzo escluso. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 9, 421—428 (1950).

L'A. met en opposition d'une part le principe du tiers exclu et d'autre part la dénombrabilité de tout système hypothético-déductif infini S exprimable moyennant un nombre fini de symboles. En conséquence, la construction de Gödel (ce Zbl. 2, 1) des propositions indécidables, peut être interprétée encore comme faisant correspondre à une suite R de propositions une proposition $P = P(R)$ n'appartenant pas à la suite R . Si l'on ne désire pas toucher à l'ordination de R c'est-à-dire au rangs des termes de R (cf. les classifications prédictives et les classifications non prédictives de Poincaré), il faut recourir à des nombres ordinaux transfinis, pour donner un rang déterminé à $P(R)$.

George Kurepa.

Zwicky, F.: The morphological method of analysis and construction. Studies Essays, pres. to R. Courant, 461—470 (1948).

Verf. propagiert in dem vorliegenden Bericht eine — wohl von ihm entwickelte — morphologische Methode. Er glaubt, in dieser Methode ein Mittel gefunden zu haben zur weitgehenden Beseitigung der Unstimmigkeiten, die sich aus der „inexhaustibility of the aspects of life“ auf der einen Seite und der Beschränktheit der Ausdrucksmittel auf der anderen Seite ergeben. Das Verfahren, das dem Verf. vor-schwebt, scheint in einer approximativen Ausschöpfung intensionaler Begriffsbil-

dungen durch extensionale zu bestehen. Die Ausführungen des Verf. sind so allgemein, daß die Ref. die Methode als solche nicht rekonstruieren konnten. Somit kann auch über den Wert der genannten Methode noch nicht geurteilt werden. Ein wesentlicher Punkt der Unklarheit ist der vom Verf. benutzte Wahrheitsbegriff, der von dem in den Einzelwissenschaften üblichen, sog. Aristotelischen Wahrheitsbegriff offenbar verschieden ist. So unterscheidet Verf. zwischen „mittelbarer“ und „nicht mittelbarer“ Wahrheit, er spricht von der „flexibility“ der Wahrheit usw. Es bleibt abzuwarten, ob das vom Verf. angekündigte Buch „Morphology of Truth“ hier Klarheit schafft. Zwei weitere Bücher über Anwendungen der morphologischen Methode werden angekündigt.

Karl Schröter/Günter Asser.

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome. Formen:

Franeckx, Ed.: Sur le nombre de racines communes à deux équations algébriques. Bull. Soc. Sci. Liège 16, 145—148 (1947).

Fan, Ky: On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations. I. II. Proc. nat. Acad. Sci. USA 35, 652—655 (1949), 36, 31—35 (1950).

I. L'A. donne tout d'abord des propriétés extrémales des valeurs propres d'opérateurs hermitiens ou normaux de l'espace unitaire C^n ; par exemple: La somme des q plus grandes valeurs propres de l'opérateur hermitien H est le maximum de la fonction $(Hx_1, x_1) + \dots + (Hx_q, x_q)$, où x_1, \dots, x_q est un système variable de vecteurs orthonormaux ($q = 1, \dots, n$). — Soient A un opérateur linéaire de C^n , $\kappa_1 \geq \dots \geq \kappa_n$ les valeurs propres de A^*A ($A^* = \text{adjoint de } A$), s un entier > 0 . L'A. montre que $\kappa_1^s + \dots + \kappa_q^s$ majore la somme des q plus grandes valeurs propres de $(A^s)^*A^s$; il déduit de ces résultats un cas particulier d'un théorème de H. Weyl (ce Zbl. 32, 387), celui où la fonction $\omega(t)$, (cf. II.), est t^s . — II. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres d'une transformation linéaire A de l'espace unitaire C^n , rangées par modules décroissants, ξ_1, \dots, ξ_n les valeurs propres de $\beta A^*A + \gamma AA^*$ ($\beta, \gamma \geq 0$, $\beta + \gamma = 1$). L'A. montre que $|\lambda_1 \dots \lambda_q|^2 \leq \xi_1 \dots \xi_q$ ($q = 1, \dots, n$). A l'aide d'un lemme de Weyl ou de Pólya [Proc. nat. Acad. Sci. USA 36, 49—51 (1950)] il en déduit que l'on a $\omega(|\lambda_1|^2) + \dots + \omega(|\lambda_q|^2) \leq \omega(\xi_1) + \dots + \omega(\xi_q)$ quand $\omega(t)$ est une fonction de $t \geq 0$ telle que $\omega(e^t)$ soit une fonction convexe de t ; cela généralise un théorème de Weyl (cf. la I^{ère} partie), établi dans le cas $\beta = 1, \gamma = 0$. Après avoir comparé les valeurs propres de A^*A et de $\beta A^*A + \gamma AA^*$, l'A. termine par des inégalités reliant les valeurs propres de $A + A^*$ aux parties réelles des valeurs propres de A .

Armand Borel.

Cherubino, Salvatore: Sulle matrici infinite. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 3, 133—159 (1950).

Die Arbeit versucht eine Theorie beliebiger unendlicher Matrizen zu geben und Resultate der Theorie der endlichen Matrizen auf unendliche Matrizen zu übertragen. Verf. übersieht völlig die aus dem Verhalten unendlicher Reihen resultierenden Schwierigkeiten, er verwendet z. B. das assoziative Gesetz $x(AB) = (xA)B$ unter der alleinigen Voraussetzung, daß die auftretenden Produkte gebildet werden können, und kommt so zu unrichtigen Aussagen, z. B. daß eine unendliche Matrix A mit einer rechten Reziproken B in seinem Sinne linear unabhängige Zeilen

besitzt, wofür die zeilenfinite Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$
 deren Zeilensumme

Null ist, ein Gegenbeispiel ist. Ebenso wird behauptet, daß für eine unendliche Matrix mit einer rechten Inversen B und einer linken Inversen C stets $B = C$ gilt, wofür man ein Gegenbeispiel etwa in der Note des Ref. [Monatsh. Math. 55, 153—156 (1951)] findet.

Gottfried Köthe.

Eichler, Martin: Zur Algebra der orthogonalen Gruppen. Math. Z. 53, 11—20 (1950).

Verf. betrachtet quadratische Formen \mathfrak{F} beliebiger Variabelnzahl n , die in dem Grundkörper k keine eigentliche Nulldarstellung besitzen. Wenn der Grundkörper den rationalen umfaßt, haben die definiten Formen diese Eigenschaft. Darüber hinaus sind derartige Formen nur für $n = 2, 3$ und 4 bekannt. Es wäre natürlich wichtig, wenn vor der Untersuchung solcher Formen festgestellt würde, wie weit sie existieren. Eine Matrix \mathfrak{T} mit der Determinante 1 wird \mathfrak{F} -orthogonal genannt, wenn sie eine automorphe Transformation der Form \mathfrak{F} bewirkt. Satz 1 zeigt, daß die für orthogonale Transformationen im engeren Sinne gültige Parameterdarstellung eine Übertragung auf beliebige \mathfrak{F} -orthogonale Matrizen gestattet. Durch (\mathfrak{F}) wird der Antiautomorphismus bezeichnet, bei dem die Matrix \mathfrak{M} in $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ übergeht. Ein kommutativer Matrizenring R heißt \mathfrak{F} -automorph, wenn er durch (\mathfrak{F}) als Ganzes in sich übergeht. Nach Satz 2 gilt für zwei derartige operatorisomorphe Ringe R_1, R_2 die elementweise zu verstehende Beziehung $R_2 = \mathfrak{S}^{-1}R_1\mathfrak{S}$, wo die \mathfrak{F} -orthogonale Matrix \mathfrak{S} einem Erweiterungskörper von k angehört. Wenn k algebraisch ist, so gibt Satz 3 die Bedingung dafür an, daß \mathfrak{S} in k liegt.

Heinrich Brandt.

Lepage, Th. H.: Sur certains idéaux de l'algèbre extérieure de degré $2n$, $n > 1$. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 24 (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25. 9. — 1. 10. 1949), 181—186 (1950)

Nach einer Einführung in den Kalkül der alternierenden Formen über einem beliebigen Körper K (Grassmannscher Ring) wird in $2n$ Variablen $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$ die alternierende Form 2. Grades $\xi_1\eta_1 + \dots + \xi_n\eta_n = \Gamma$ gebildet und andeutend gezeigt, daß im Falle Charakteristik $K = 0$ oder $> n$ das Ideal aller von Γ annullierten Elemente eine aus Produkten von Linearformen und Potenzen von Γ bestehende Basis hat. Angewandt werden diese und ähnliche Ergebnisse zu neuen Beweisen von Sätzen von Kronecker-Runge und Radon, welche symmetrische Matrizen betreffen, sowie auf symplektische Matrizen und eine mit der Charakteristiken-Theorie von Monge-Ampère zusammenhängende Frage.

Erich Kähler.

Papy, Georges: Sur l'arithmétique de l'algèbre de Grassmann. Bull. Soc. math. Belgique 1949—1950, 18—31 (1950).

Définition de l'algèbre extérieure sur un A -module, A étant un anneau d'intégrité de caractéristique quelconque. Lorsque A est un corps de caractéristique nulle ou de caractéristique ne divisant pas n , on sait que tout $n + k$ -vecteur de l'Algèbre extérieure, définie sur un espace vectoriel à $2n$ dimensions, est le produit de la puissance k^e d'un bivecteur de rang $2n$ par un $n - k$ -vecteur déterminé. L'A. indique dans quelle mesure cette propriété est susceptible de s'étendre au cas où A est un anneau d'intégrité de caractéristique quelconque. La solution dépend de la discussion d'un système diophantien; la méthode de démonstration est seulement esquissée [pour un exposé complet, on consultera un mémoire de l'A. paraissant dans Acad. roy. Belgique, Cl. Sci., Mém. 1951: G. Papy; Sur l'Arithmétique dans les algèbres de Grassmann.]

Th. Lepage.

Gruppentheorie:

• **Zassenhaus, H.:** The theory of groups. — Translated by S. Kravetz. New York: Chelsea Co. 1949. VIII, 159 p. \$ 3,50.

Takahasi, Mutuo: Note on locally free groups. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 1, 65—70 (1950).

Eine Gruppe L heißt lokal frei, wenn je endlich viele Elemente in L eine freie Untergruppe von L erzeugen. In der vorliegenden Note wird das Problem behandelt, die freien Gruppen unter den lokal freien Gruppen zu charakterisieren. Eine notwendige Bedingung ist in der Tatsache enthalten, daß freie Gruppen keine unendlich aufsteigenden Ketten von [freien] Untergruppen beschränkten Ranges enthalten. Eine Untergruppe U endlichen Ranges der lokal freien Gruppe L heiße $*$ -Untergruppe, wenn sie freier Faktor einer jeden U enthaltenden, freien Untergruppe endlichen Ranges von L ist. Die abzählbare, lokal freie Gruppe L ist dann und nur dann frei, wenn jede endliche Teilmenge von L in einer $*$ -Untergruppe von L enthalten ist. Weiter ist die abzählbare, lokal freie Gruppe L dann und nur dann frei, wenn es keine aufsteigende Kette $< V(1) < \dots < V(i) < V(i+1) < \dots$ freier Untergruppen endlichen Ranges von L derart gibt, daß $V(1)$ in keinem echten freien Faktor irgendeines $V(i)$ enthalten ist. *Reinhold Baer.*

Fröhlich, A.: The representation of a finite group as a group of automorphisms on a finite abelian group. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 1, 270—283 (1950).

Es wird untersucht, in welcher Weise eine gegebene endliche Gruppe der Ordnung h als Automorphismengruppe einer abelschen Gruppe der Ordnung n dargestellt werden kann. Dieses Problem wird unter der Einschränkung, daß h und n teilerfremd sind, vollständig behandelt. Wesentliches und im wesentlichen einziges Hilfsmittel bildet K. Shodas Arbeit „Über die Automorphismen einer endlichen abelschen Gruppe“ [Math. Ann. 100, 674 (1928)]. Außerdem wird ein völliger Parallelismus zwischen Darstellungen im Restklassenring mod. p^r und im endlichen Körper mit p Elementen nachgewiesen. Verf. betont, daß die zur Aufstellung seiner Resultate verwendeten Hilfsmittel nicht die einzigen sind, aber die elementarsten zu sein scheinen. Insbesondere wird keine Kenntnis der allgemeinen Ringtheorie benötigt. Die Ergebnisse der Arbeit überschneiden sich teilweise mit denen von Szekeres (dies. Zbl. 37, 151). Schließlich kündigt Verf. Anwendungen seiner Arbeit auf die Theorie der algebraischen Zahlkörper an. *Helmuth Ulm.*

Kemchadze, Š. S.: Über die Regularität der p -Gruppen für $p = 2$. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 11, 607—611 (1950) [Russisch].

Es wird bewiesen, daß eine im Sinne von P. Hall (dies. Zbl. 7, 291) reguläre Gruppe der Ordnung 2^n abelsch ist. Als Folgerung ergibt sich: Jede unendliche nicht-abelsche Gruppe, in der die Ordnung jedes Elementes eine Potenz von 2 ist und jede durch zwei Elemente erzeugte Untergruppe endliche Ordnung hat, ist nicht-regulär. *Rudolf Kochendörffer.*

Ramanathan, K. G.: On the product of the elements in a finite abelian group. J. Indian math. Soc., n. Ser. 11, 44—48 (1947).

Verf. beweist: Das Produkt aller Elemente einer endlichen abelschen Gruppe ist gleich der Gruppeneins, falls die Gruppe nicht genau ein Element der Ordnung 2 enthält. Ist aber A das einzige Element der Ordnung 2 der Gruppe, so ist das Produkt aller Elemente gleich A . *Otto Grün.*

Iseki, Kiyoshi and Tadashi Michiura: Note on papers by C. J. Everett and L. Fuchs. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part I 2, 51 (1950).

Verff. setzen sich zum Ziele, zu beweisen, daß in einer teilweise geordneten abelschen Gruppe G die folgenden Bedingungen äquivalent sind: (1) gilt $na \geq 0$ für irgendeine natürliche Zahl n , so folgt $a \geq 0$, (2) kein von Null verschiedenes Element von G ist von endlicher Ordnung. [Diese Bedingungen hatten Everett und Ref. zum Beweis der Erweiterungsfähigkeit der Ordnung von G zu einer linearen benutzt (dies. Zbl. 35, 16—17).] Der Beweis enthält einen Irrtum; Everett hat nämlich gezeigt, daß eine lineare Erweiterung auf irgendeine Weise und nicht auf alle denkbaren Weisen möglich ist. (Der Satz wird z. B. auch durch das folgende

Gegenbeispiel widerlegt; in der additiven Gruppe aller rationalen ganzen Zahlen sei die gewöhnliche Ordnung $n \geq m$ nur dann erklärt, wenn $n \equiv m \pmod{2}$ ist. Nun ist (2) erfüllt und gilt $2 > 0$, ohne daß $1 > 0$ wäre.) *Ladislaus Fuchs.*

Hille, Einar: Les semi-groupes linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 35—37 (1949).

Für jedes Element x der Menge E^+ der n -tupel reeller Zahlen ≥ 0 sei $T(x)$ lineare Abbildung eines endlichdimensionalen Vektorraumes über dem Körper der komplexen Zahlen und $\|T(x)\| \leq 1$. Die Menge der $T(x)$ wird dann eine lineare Halbgruppe mit n reellen Parametern genannt, wenn es eine stetige Abbildung F von $E^+ \times E^+$ in E^+ so gibt, daß $T(x)T(y) = T(F(x, y))$, $F(x, F(y, z)) = F(F(x, y), z)$, $F(x, 0) = F(0, x) = x$ gilt (0 ist dabei das n -tupel aus lauter Nullen). Unter gewissen Voraussetzungen über F gehört zu jedem a aus E^+ eine Unterhalbgruppe mit einem reellen Parameter $\xi (\geq 0)$, deren Elemente in der Form $T(f(\xi a))$ mit $f((\xi + \eta)a) = F(f(\xi a), f(\eta a))$ und $\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^{-1} f(\xi a) = a$ gegeben sind. Jede dieser Unterhalbgruppen liefert eine infinitesimale Transformation. Wird noch die Existenz stetiger partieller Ableitungen bis zur dritten Ordnung von F (nach den $2n$ reellen Argumenten) vorausgesetzt, so gelten die drei Lieschen Hauptsätze, die ersten beiden allerdings geringfügig abgeändert. *Günter Pickert.*

Verbände. Ringe. Körper:

Lombardo-Radice, Lucio: Sull'involuzione equatoriale del reticolo distributivo libero con n generatori. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **9**, 212—219 (1950).

Die selbstdualen Elemente eines freien distributiven Verbandes R_n mit n Erzeugenden müssen offensichtlich auf dem Äquator des zugehörigen Hasse-Diagramms (hier irrtümlich „diagramma di Hesse“ genannt) liegen, doch ist diese Bedingung nicht hinreichend. Zur Feststellung der selbstdualen Elemente wird die Abbildung der Elemente von R_n auf die für \cup abgeschlossenen Untermengen G von B^n benutzt. Dabei bezeichnet B^n den Verband, der aus den Kombinationen der Ziffern $1, \dots, n$ zu je $0, 1, \dots, n$ besteht. Es wird gezeigt, daß ein Element von R_n dann und nur dann selbstdual ist, wenn das zugehörige G in B^n zu $B^n - G$ dual ist. Mit dieser Methode werden die 12 selbstdualen und die 12 nicht selbstdualen äquatorialen Elemente von R_4 nachgewiesen. *Friedrich Wilhelm Levi.*

Ikushima, Isaku: On π -regular rings. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part I **2**, 91—95 (1950).

Un anneau R est dit π -régulier si, pour tout $a \in R$, il existe un $x \in R$ et un entier $n \geq 1$ tels que $a^n x a^n = a^n$; cette notion, due à McCoy [Bull. Amer. math. Soc. **42**, 819 (1936)], généralise la notion d'anneau régulier introduite par von Neumann (et correspondant au cas où on suppose qu'on peut toujours prendre $n = 1$). L'A. étend de façon évidente aux anneaux π -réguliers certaines des propriétés démontrées par von Neumann pour les anneaux réguliers; un certain nombre de ses résultats sont d'ailleurs déjà dans le travail cité de McCoy.

Jean Dieudonné.

Mori, Shinjiro: Teilerfremde und relativ prime Ideale. J. Sci. Hiroshima Univ., A **14**, 165—169 (1950).

In einem kommutativen Ring \mathfrak{R} heißen bekanntlich die Ideale α und \mathfrak{b} teilerfremd, falls $(\alpha, \mathfrak{b}) = \mathfrak{R}$, und \mathfrak{b} heißt relativ prim zu α , wenn $\alpha = \alpha : \mathfrak{b}$ ist. Verf. untersucht diejenigen Ringe, in welchen die erwähnten zwei Eigenschaften für je zwei Ideale α, \mathfrak{b} übereinstimmen. Falls \mathfrak{R} ein Einselement besitzt, können solche Ringe durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert werden: 1. für jedes Halbprimideal \mathfrak{h} mit $\mathfrak{h} \supset \alpha$ gilt die Beziehung $\alpha : \mathfrak{h} \supset \alpha$; 2. gilt der Teilerketten-satz, so ist jedes Primideal $\neq 0$ ein maximales Ideal; 3. der Begriff „relativ prim“

ist symmetrisch. Im Falle im Ring \mathfrak{R} kein Einselement vorhanden ist, aber der Teilerkettensatz gilt, so lautet die Bedingung: zusammen mit 2. besteht noch: es gibt kein Ideal zwischen \mathfrak{R} und \mathfrak{R}^2 . *Ladislav Fuchs.*

Thrall, R. M.: Some generalizations of quasi-Frobenius algebras. Trans. Amer. math. Soc. **64**, 173—183 (1948).

Eine Algebra \mathfrak{A} über einem Körper K heißt Quasi-Frobeniussche Algebra (QF-Algebra), wenn sie ein Einheitsselement besitzt und jedes primitive Rechtsideal zu einem primitiven Linksideal dual ist. Da einige der wichtigsten Eigenschaften der QF-Algebren auch bei allgemeineren Algebren auftreten, zerlegt Verf. die Definitionseigenschaft zu folgenden Definitionen: \mathfrak{A} heißt QF_1 -Algebra, wenn jede getreue Darstellung von \mathfrak{A} ihre eigene zweite Vertauschungsalgebra ist. \mathfrak{A} heißt QF_2 -Algebra, wenn jedes primitive Linksideal (Rechtsideal) ein einziges minimales Unterideal besitzt. \mathfrak{A} heißt QF_3 -Algebra, wenn sie eine einzige minimale getreue Darstellung besitzt. — Dabei heißt eine getreue Darstellung minimal, wenn jeder direkte Bestandteil nicht mehr getreu ist. — Jede QF-Algebra ist eine QF_{123} -Algebra, nicht jede QF_1 -Algebra eine QF-Algebra. Die QF_2 -Algebren können durch Eigenschaften ihrer primitiven Rechtsideale (Linksideale) in verschiedener Weise charakterisiert werden; ebenso läßt sich durch zusätzliche Forderungen der Fall abgrenzen, daß eine QF_2 -Algebra eine QF-Algebra ist. Jede QF_2 -Algebra ist eine QF_3 -Algebra, jedoch gilt, wie Beispiele belegen, nicht das Umgekehrte. Schließlich werden noch die QF_{13} -Algebren gekennzeichnet. *Wilhelm Specht.*

Gotô, Morikuni: On a theorem of E. E. Levi. Math. Japon. **1**, 104—106 (1948).

Nach E. E. Levi ist eine Liesche Algebra \mathfrak{L} über dem Ring der komplexen Zahlen direkte Summe seines Radikals und einer halbeinfachen Algebra \mathfrak{R} , und nach A. Malcev gibt es bis auf innere Automorphismen nur eine solche Zerlegung. Dies wird hier mit der Methode der unitären Beschränkung von H. Weyl neu bewiesen, gestützt auf den von K. Iwasawa stammenden Satz: Enthält eine lokal kompakte Gruppe \mathfrak{G} einen abgeschlossenen Normalteiler \mathfrak{N} , der einer n -dimensionalen Vektorgruppe isomorph ist, und ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ kompakt, so enthält \mathfrak{G} eine kompakte Untergruppe \mathfrak{R} als Repräsentantensystem von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, dabei ist \mathfrak{R} bis auf innere Automorphismen eindeutig bestimmt. *Ernst Witt.*

Okugawa, Kôtarô: On the ring with derivations. Math. Japon. **1**, 152—163 (1949).

Verf. gibt einen Überblick über Eigenschaften kommutativer differenzierbarer Ringe und über ihre Idealtheorie. Diese, Verf. schon längere Zeit bekannten Ergebnisse konnten zunächst nicht veröffentlicht werden. Sie stehen in enger Beziehung zu den entsprechenden Untersuchungen von Kôlehin, Raudenbush und Ritt. — Ein kommutativer Ring R mit Einselement heißt ein differenzierbarer Ring R , wenn eine eindeutige Abbildung D von R in sich gegeben ist mit $D(x + y) = Dx + Dy$ und $D(x \cdot y) = Dx \cdot y + x \cdot Dy$. Im allgemeinen wird jedoch sogleich eine ganze Menge $\mathbf{D} = \{D_i\}$ von verschiedenen Ableitungen in R vorausgesetzt. Der Ring $R[y]_{\mathbf{D}}$ der Differentialpolynome in beliebig vielen Unbestimmten y_i und Ableitungen aus \mathbf{D} kann dann in bekannter Weise definiert werden. Verf. beschränkt sich indessen in dieser Arbeit auf den Fall, daß die Anzahl der Unbestimmten endlich ist, und daß weiter \mathbf{D} ebenfalls nur endlich viele Ableitungen enthält, die paarweise miteinander vertauschbar sind. Es folgen die Definition des differenzierbaren Ideals (D -Ideal) und verschiedene Hilfssätze über idealtheoretische Beziehungen; insbesondere für perfekte Ideale. Nach einigen Bemerkungen über Isomorphismen und Homomorphismen differenzierbarer Ringe wird der Begriff der einer Teilmenge zugeordneten Gesamtheit von differenzierbaren Primidealen (variety of prime D -ideals) definiert und gezeigt, daß diese Gesamtheiten umkehrbar eindeutig den perfekten D -Idealen entsprechen. Hieran schließen sich einige Bemerkungen über irreduzible perfekte D -Ideale an. Diese

Resultate werden im folgenden auf den Ring der Differentialpolynome in n Unbestimmten über einem differenzierbaren Grundkörper K angewandt. Insbesondere wird die Darstellung perfekter Ideale als Durchschnitt von Primidealen eingehender untersucht.

Hans Joachim Kowalsky.

Okugawa, Kôtarô: Basis theorem for D -polynomials. Math. Japon. 2, 35—39 (1949).

Die Arbeit enthält einen Beweis des Basissatzes für perfekte D -Ideale im Ring der Differentialpolynome in einem differenzierbaren Körper K : K sei ein Körper der Charakteristik Null, in dem ein System D von Ableitungen D_v erklärt ist (vgl. vorangehendes Referat). Sind y_1, \dots, y_n endlich viele Unbestimmte, so bezeichne $R = K[y_1, \dots, y_n]_D$ den Ring der Differentialpolynome in den y_v und den Ableitungen aus D . Der Basissatz lautet dann: Besteht D nur aus endlich vielen Ableitungen, die paarweise miteinander vertauschbar sind, so besitzt jedes perfekte D -Ideal in R eine endliche perfekte D -Idealbasis. D. h.: Ist m ein perfektes D -Ideal in R , so gibt es eine endliche Teilmenge $\sigma \subset R$ derart, daß m gleich dem durch σ erzeugten perfekten D -Ideal $[\sigma]$ ist. Zum Nachweis dieses Satzes wird eine etwas allgemeinere Aussage durch doppelte Induktion bewiesen. Dabei werden folgende Hilfssätze benutzt, deren Beweis am Schluß der Arbeit nachgeholt wird: (1) x sei ein Element und σ eine Teilmenge eines beliebigen D -Ringes. Besitzt dann das durch σ und x erzeugte perfekte D -Ideal $[\sigma, x]$ eine endliche perfekte D -Idealbasis, so kann diese Basis in der Form $\{z_1, \dots, z_r, x\}$ ($z_\rho \in \sigma$) gewonnen werden. (2) Haben entsprechend die perfekten D -Ideale $[\sigma, x]$ und $[\sigma, y]$ endliche Basen $\{z_1, \dots, z_r, x\}$ und $\{z_{r+1}, \dots, z_s, y\}$, so besitzt das Ideal $[\sigma, x, y]$ eine perfekte D -Idealbasis der Form $\{z_1, \dots, z_s, x, y\}$.

Hans Joachim Kowalsky.

Zahlkörper:

• Hecke, E.: Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Reprint. New York: Chelsea Co. 1948. VIII, 266 p. \$ 3,95.

• Landau, E.: Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. 2. edition, reprint. New York: Chelsea Co. 1949. VII, 147 p. \$ 2,95.

• Schwarz, S.: Algebraische Zahlen. Praha: Přírodověd. nakl. 1950. 290 S. 136 Kčs. [Tschechisch].

• Pollard, Harry: The theory of algebraic numbers. (Carus Mathematical Monographs, No. 9.) New York: John Wiley and Sons 1950.

Verf. gibt eine kurze Einführung in die Grundlagen der algebraischen Zahlentheorie. Ausgehend von der Arithmetik im rationalen und im Gaußschen Zahlkörper, sowie von den erforderlichen elementaren Sätzen über Polynome, entwickelt er die grundlegenden Begriffe und Tatsachen über algebraische Zahlkörper und ganze algebraische Zahlen und illustriert sie an den Kreiskörpern und quadratischen Zahlkörpern. Sodann behandelt er die Primzerlegung auf idealtheoretischer Grundlage, wobei er dem klassischen Beweisgang nach Dedekind einen moderneren nach Ore folgen läßt. Anschließend bringt er eine Teilaussage des Dedekindschen Diskriminantensatzes (aus $p \nmid d$ folgt p unverzweigt), sowie die einfachsten Tatsachen über Kongruenzen nach Idealen und beweist die Endlichkeit der Klassenzahl und den Dirichletschen Einheitsatz. Als klassische Anwendung der Idealtheorie bringt er den Beweis nach Kummer für die Unmöglichkeit der Fermatschen Gleichung (Fall I, im rationalen Zahlkörper) für reguläre Primzahlen. Auf S. 115/16 wird ohne Begründung oder Zitat die Behauptung ausgesprochen, daß es unendlich viele irreguläre Primzahlen gibt. — Dadurch, daß der systematische, begriffliche Aufbau der Theorie laufend an Beispielen illustriert wird, und durch die klare, anziehende Darstellungsweise stellt das Büchlein einen recht guten Wegweiser

für einen einführenden Kurs über algebraische Zahlentheorie dar und ist auch zum Selbststudium bestens geeignet. *Helmut Hasse.*

Davenport, Harold: *L'algorithme d'Euclide dans certains corps algébriques.* (Colloques internat. Centre. nat. Rech. Sci. Nr. 24 (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25. 9.—1. 10. 1949), 41—43 (1950).

Eine „vorläufige Mitteilung“ über die im Problem der Existenz des Euklidischen Algorithmus in Zahlkörpern bis zum 4. Grad erreichten Resultate des Verf. — Inzwischen sind die diesbezüglichen ausführlichen Darstellungen des Verf. schon erschienen (dies. Zbl. 37, 308, 39, 31). *Ladislav Rédei.*

Yamashita, Chitose: *On the computations of the indices of the groups of norm residues and of the group of power residues without employing logarithm.* Tôhoku math. J., II. Ser. 1, 279—284 (1950).

In der Chevalleyschen Klassenkörpertheorie werden die im Titel angegebenen Gruppenindizes für lokale vollverzweigte zyklische algebraische Zahlkörper vermöge des gruppentheoretischen Herbrandschen Lemmas bestimmt, und zwar unter der für die Anwendung allein wesentlichen Voraussetzung einer hinreichend hohen Primdivisorpotenz als Modul. Der Ansatz des Herbrandschen Lemmas geschieht in der Chevalleyschen Klassenkörpertheorie durch Übergang von den multiplikativen Einseinheitengruppen zu additiven Gruppen mittels Bildung der Logarithmen. Verf. zeigt, daß man die Benutzung der Logarithmen durch einen verhältnismäßig einfachen Formalismus vermeiden kann, der sich auf eine Normalbasis (teilbar durch eine hinreichend hohe Primdivisorpotenz) stützt. *Helmut Hasse.*

Mahler, K.: *Algebraic relations between two units of an algebraic field.* Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 24 (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25. 9.—1. 10. 1949), 47—55 (1950).

Es sei R ein endlich algebraischer Zahlkörper, $F(x, y)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus R , welches irreduzibel über dem Körper S aller komplexer Zahlen ist. Es sei weiter eine endliche Menge \mathfrak{P} von Primidealen $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t$ aus R vorgegeben und $\langle \mathfrak{P} \rangle$ die Menge aller ganzen Zahlen $\neq 0$ aus R , die höchstens durch die Primideale aus \mathfrak{P} teilbar sind. Die Einheiten von R gehören zu dieser Menge. Verf. studiert nun die Polynome $F(x, y)$, für welche die Kurve $C: F(x, y) = 0$ eine unendliche Menge Σ von ganzzahligen Lösungen (ξ, η) aus R besitzt, wo η zu $\langle \mathfrak{P} \rangle$ gehört. Dabei soll gleich angenommen werden, daß C keine Gerade parallel zu den Koordinatenachsen ist. Wesentliches Hilfsmittel ist der berühmte Satz von C. L. Siegel (Preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1929, Nr. 1). Verf. geht von zwei Tatsachen aus: 1. (Lemma 1 der Arbeit): Es gibt eine natürliche Zahl N_0 , so daß für alle Primzahlen $N > N_0$ und für jedes $\alpha \neq 0$ aus S $F(x, \alpha y^N)$ irreduzibel über S ist, wenn $F(x, y)$ irreduzibel über S und nicht von der Gestalt $a x + b$ ($a \neq 0, b$ in S) ist. 2. (Lemma 2): Ist M eine beliebige natürliche Zahl, so gibt es eine endliche Menge von Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ aus $\langle \mathfrak{P} \rangle$, so daß jedes α aus $\langle \mathfrak{P} \rangle$ in der Gestalt $\alpha = \alpha_r \beta^M$ ($1 \leq r \leq t, \beta$ in $\langle \mathfrak{P} \rangle$) geschrieben werden kann. Es kann also angenommen werden, daß bei vorgegebenen M die η von Σ die Gestalt $\alpha_0 \beta^M$ haben (α_0 fest $\neq 0, \alpha_0, \beta$ aus $\langle \mathfrak{P} \rangle$), indem man nötigenfalls zu einer unendlichen Teilmenge von Σ übergeht, d. h. aber: Mit der Kurve $C: F(x, y) = 0$ besitzt auch, wenn man gleich für M eine Primzahl N aus Lemma 1 nimmt, die Kurve $C_N: F(x, \alpha_0 y^N) = 0$ unendlich viele Lösungen der Gestalt Σ . Dabei sind $F(x, y)$ und $F(x, \alpha_0 y^N)$ irreduzibel über S . Auf die Kurven C und C_N kann jetzt der Satz von Siegel angewendet werden, der besagt, daß jede solche Kurve vom Geschlecht 0 ist und eine

Parameterdarstellung $x = P(z) = \sum_{k=-m}^m a_k z^k, y = Q(z) = \sum_{k=-m}^m b_k z^k$ besitzt, wo z eine rationale

Funktion in x, y ist und (bei unseren Voraussetzungen über F) P, Q nicht konstant sind. O. B. d. A. kann angenommen werden, daß für ein $k > 0, b_k \neq 0$ ist. Die Anwendung des Satzes von Siegel auf C_N liefert für C die weitere Parameterdarstellung $x = P_N(Z), y^{1/N} = Q_N(Z)$, wo P_N, Q_N wie oben erklärt sind und Z rational in x und $y^{1/N}$ ist. Es muß also z eine rationale Funktion von Z sein. Eine längere Diskussion zeigt uns, daß sie ein Monom in Z ist und daß $Q(z)$ bei genügend großen N von der Gestalt $b(z - \zeta)^d$ ist ($b \neq 0, d$ natürliche Zahl). Dabei wird der Satz von Siegel auf die Kurve $x^N - y^N = \zeta_1 (\zeta_1 \neq 0)$ angewendet. Es kann also folgende Parameterdarstellung von C erreicht werden: $x = P(z), y = \alpha z^d$ ($\alpha \neq 0$ komplex, $d > 0$ ganz), wobei noch α beliebig gewählt werden kann. Nach Lemma 2 können die η von Σ in der Gestalt $\alpha_0 \beta^d$ angenommen werden. Wir nehmen daher in der obigen Parameterdarstellung $\alpha = \alpha_0$. Man kann sich nun auf zwei Fälle beschränken: I. Alle η von Σ haben die Gestalt $\eta = \alpha_0 \varepsilon^d$, wo ε Einheit aus R ist. II. Alle η von Σ haben die Gestalt $\eta = \beta^d$, wo die Norm von β nicht beschränkt

bleibt, wenn alle Punkte von Σ durchlaufen werden. Im ersten Fall liegen die Koeffizienten von P in R , im zweiten Fall liegen sie ebenfalls in R , und P ist ein Polynom. Dies ist der Inhalt des ersten Satzes der Arbeit: Besitzt die Kurve $C: F(x, y) = 0$ (F habe Koeffizienten aus einem endlichen algebraischen Zahlkörper R und sei irreduzibel über S) unendlich viele ganzzahlige Lösungen (ξ, η) aus R , wo η nur durch eine endliche Menge von gegebenen Primidealen aus R

teilbar ist, so besitzt C eine Parameterdarstellung $x = \sum_{k=-m}^m a_k z^k$, $y = \alpha z^d$ (m, d natürliche

Zahlen, $\alpha \neq 0$). Sind die η Einheiten aus R , so liegen die a_k und α in R . Ist dagegen die Norm der η nicht beschränkt, so liegen die a_k, α weiter in R und x ist ein Polynom in z . Dabei soll C keine Gerade parallel zu den Koordinatenachsen sein. — Verf. setzt jetzt schärfer voraus, daß sowohl ξ , wie η zu $\langle \mathbb{H} \rangle$ gehören. Dann liefert der obige Satz zwei Parameterdarstellungen für $C: x = \alpha z^c = P(z')$, $y = Q(z) = \beta z'^d$, wo P, Q nicht konstant sind. Da z' und z rational in x, y sind, so müssen z' und z durch eine linear gebrochene Transformation zusammenhängen. Es zeigt sich, daß nur die beiden Fälle möglich sind: 1. $z' = \sigma/z$. Dann ist C von der Gestalt $x = \alpha z^c$, $y = \gamma z^{-d}$, also implizit $x^d y^c = \alpha^d \gamma^c$ (α, γ in R). 2. $z' = Az + B$. Dieser Fall erfordert die Anwendung des Siegelischen Satzes auf die Kurve $Au x^N + B = v y^N$ ($u, v \neq 0$) und zeigt, daß $B = 0$ ist. Es hat also C die Gestalt $x = \alpha z^c$, $y = \beta_1 z^d$ oder implizit $\beta_1^c y^c = \alpha^d x^d$. Nehmen wir noch die bisher ausgeschlossenen Fälle $x = a$ und $y = b$ hinzu, so folgt also der zweite Satz der Arbeit: Besitzt die Kurve $C: F(x, y) = 0$ (F Polynom über einem endlichen algebraischen Zahlkörper R , irreduzibel über dem Körper S aller komplexen Zahlen) unendlich viele ganzzahlige Lösungen (ξ, η) aus R , welche nur durch eine endliche Menge von gegebenen Primidealen aus R teilbar sind, dann besteht das Polynom $F(x, y)$ aus genau zwei nichtverschwindenden Termen. Dies trifft insbesondere zu, wenn ξ, η Einheiten aus R sind. Für den Fall: $R = \text{Körper der rationalen Zahlen}$ vgl. Verf., dies. Zbl. 19, 250. Edmund Hlawka.

Hasse, Helmut: Osservazioni riguardanti funzioni ellittiche e numeri algebrici.

Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 29, 225—242 (1949).

Die beiden ersten Paragraphen der vorliegenden Arbeit enthalten Bemerkungen über Modulformen und elliptische Funktionen, die für den Ausbau der analytischen Theorie der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen gedacht sind.

§ 1.
$$A_{12} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) = \frac{2\pi}{\omega_2} q^{1/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^2, \quad q = e^{2\pi i \omega_1/\omega_2},$$

sei die 12-te Wurzel aus der Diskriminante $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$, $\Delta_t = \Delta_{12}^{12/t}$ für $t|12$. Die durch

$\Delta_t \left(S \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \right) = \chi_t(S) \Delta_t \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)$ gegebene Darstellung ersten Grades $S \rightarrow \chi_t(S)$ der engeren Modul-

gruppe \mathfrak{M} wird nach W. Schäfer (Beweis des Hauptidealsatzes der Klassenkörpertheorie für den Fall der komplexen Multiplikation, Diss. Halle 1929) bestimmt. Es ist $\chi_t = \chi_{12}^{12/t}$, $\chi_{12} = \chi_3/\chi_4$. χ_3 ergibt sich daraus, daß $\chi_3(S) = 1$ ist für S aus der Hauptkongruenzgruppe \mathfrak{G}_3^{\pm} dritter Stufe

im weiteren Sinne, für die Repräsentanten der Restklassen von \mathfrak{M} modulo \mathfrak{G}_3^{\pm} kann χ_3 leicht bestimmt werden. Entsprechend wird χ_4 daraus bestimmt, daß $\chi_4(S) = 1$ ist für S aus der Hauptkongruenzgruppe \mathfrak{G}_4 vierter Stufe im engeren Sinne. Sei M eine primitive Transformation m -ten Grades. Wie transformiert sich Δ_t bei M ? a) $t|12$, $(t, m) = 1$. Wenn $M_1, \dots, M_{\nu(m)}$ ein volles Vertretersystem der primitiven Klassen \mathfrak{M} vom Grade m ist, so gilt für $S \in \mathfrak{M}$

$\Delta_t \left(M_{\nu} S \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \right) = \chi_t^m(S) \Delta_t \left(M_{\nu(s)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \right)$, $M_{\nu} S = S_{\nu} M_{\nu(s)}$, $S_{\nu} \in \mathfrak{M}$. $\Delta_t \left(M \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \right)$ ist also von

der Stufe $t m$. b) $m = t = 2, 3$. T_1, \dots, T_{t+1} sei ein Vertretersystem der primitiven Klassen \mathfrak{M} T vom Grade t . Zu jedem Index ν wird ν' durch $T_{\nu} T_{\nu'} \equiv 0 \pmod{t}$ definiert, so daß $T_{\mu} T_{\nu}, \mu \neq \nu'$, ein Vertretersystem der primitiven Klassen t^2 -ten Grades ist. Die $t(t+1)$ Modulformen

$e^{2\pi i \lambda/t} \Delta_t \left(T_{\nu} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \right)$, $\lambda \pmod{t}$, $\nu = 1, 2, \dots, t+1$, vertauschen sich bei $S \in \mathfrak{M}$ ebenso wie die

$t(t+1)$ Transformationsklassen $\mathfrak{M} T_{\nu}^{(\lambda)} T_{\nu}$, $\lambda \pmod{t}$, $\nu = 1, 2, \dots, t+1$, bei Multiplikation mit S von rechts, die $T_{\nu}^{(\lambda)}$ sind die T_{μ} , $\mu \neq \nu'$, in passender, von ν abhängiger Reihenfolge. — § 2. w sei ein Periodengitter, $\zeta(u|w)$ die Weierstraßsche ζ -Funktion, $\zeta(u+\omega|w) = \zeta(u|w) + \omega^*(\omega|w)$, $\omega \in w$.

v sei ein Gitter, in dem w Untermodul mit zyklischer Faktorgruppe der Ordnung m ist. (1) $f(u|w, v) = \zeta(u|w) - \sum_{\substack{q \pmod{v} \\ q \in v}} \zeta(u-q|w)$ ist ganz, transformiert sich nach (2) $f(u+\omega|w, v)$

$= f(u|w, v) + [\omega^*(\omega|v) - m \omega^*(\omega|w)]$, $\omega \in w$. $f'(u)$ ist also konstant, (3) $f = A(w, v) u + B(w, v)$, A, B sind Modulformen der Dimensionen $-2, -1$; (4) $A(w, v) = \frac{\omega^*(\omega|v) - m \omega^*(\omega|w)}{\omega}$.

(3) gibt nach Differentiation für $u \rightarrow 0$ wegen (1): $A(w, v) = \sum_{\substack{q \equiv 0 \pmod{v} \\ q \in v}} \wp(q|w)$. (4) zeigt, wie sich

$\omega^*(\omega|\mathfrak{w})$ als Modulform von \mathfrak{w} mit dem Parameter ω bei Transformationen m -ten Grades (Übergang von \mathfrak{w} zu \mathfrak{v}) verhält. ω_1, ω_2 sei eine Basis von \mathfrak{w} . $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2, \mathfrak{w}_3$ seien die drei Gitter, in denen \mathfrak{w} Untergruppe vom Index 2 ist, $\frac{1}{2} T_\nu \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$ sind dann Basen der \mathfrak{w}_ν , wenn T_1, T_2, T_3 Vertreter der Transformationsklassen 2-ten Grades bedeuten.

$$s_\nu(u|\mathfrak{w}) = e^{(u^2/2)A(\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_\nu)} \frac{\Delta_{12}^2 \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}}{\Delta_{12} \left(\frac{1}{2} T_\nu \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \right)} \frac{\sigma^2(u|\mathfrak{w})}{\sigma(u|\mathfrak{w}_\nu)}; \quad \nu = 1, 2, 3$$

$[\sigma(u|\mathfrak{w}) = \text{Weierstraßsche } \sigma\text{-Funktion}]$ sind 3 homogene Funktionen 0-ter Dimension in u, ω_1, ω_2 . Es ist $s_\nu(u + \omega|\mathfrak{w}) = \varepsilon(\omega|\mathfrak{w}_\nu) s_\nu(u|\mathfrak{w}_\nu)$, $\omega \notin \mathfrak{w}$, mit $\varepsilon(\omega|\mathfrak{w}) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \omega \in \mathfrak{w} \\ -1, & \frac{1}{2} \omega \notin \mathfrak{w} \end{cases}$. $s_\nu(u|\mathfrak{w})$ ist eine ungerade elliptische Funktion zweiter Ordnung zum Gitter $2\mathfrak{w}$, s_ν^2 ist eine gerade Funktion zweiter Ordnung zu \mathfrak{w} . — Die in § 1 bestimmte Umsetzung der Δ_i bei Transformationen m -ter Ordnung und (4) erlauben es, die Umsetzung der s_ν bei Moduls substitutionen zu untersuchen. Die s_ν^2 sind Funktionen vierter Stufe und lassen sich auch „additiv“ in der Form

$$s_\nu^2(u|\mathfrak{w}) = \frac{\Delta_6^2 \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}}{\Delta_6 \left(\frac{1}{2} T_\nu \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \right)} \frac{1}{\wp(u|\mathfrak{w}) - e_\nu(\mathfrak{w})}$$

ausdrücken. — § 3. Als modulare Normfunktion wird definiert:

$$D \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \left| \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} \omega_1 & \bar{\omega}_1 \\ \omega_2 & \bar{\omega}_2 \end{vmatrix} \right| \left| \sqrt{\Delta \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}} \right|^2.$$

Sie ist eine nichtanalytische Modulfunktion erster Stufe, die überall endlich und positiv ist, $D \begin{pmatrix} \bar{\omega}_1 \\ \bar{\omega}_2 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$. Ist K ein reiner kubischer Körper mit der negativen Diskriminante $-3f^2$, so ist nach Dedekind seine Klassenzahl h durch (5) $E^h = \prod_{\mathfrak{f}_1} D(\mathfrak{f}_1) \prod_{\mathfrak{f}_0} D(\mathfrak{f}_0)$ gegeben, wo $E > 1$ Grundeinheit von K ist und \mathfrak{f}_ν die Ringklassen modulo f von $(\sqrt{-3})$ durchläuft, für die $\chi(\mathfrak{f}_\nu) = e^{(2\pi i/3)\nu}$ ist, unter $\chi(\mathfrak{f})$ einen erzeugenden Charakter der Ringklassengruppe von $(\sqrt{-3})$ verstanden, zu der der Normalkörper N von K Klassenkörper [über $(\sqrt{-3})$] ist. — Verf. vermutet aus der Analogie der Dedekindschen Formel mit der Klassenzahlformel für reelle quadratische Körper, daß die $D(\mathfrak{f})$ assoziierte Zahlen, in Sonderfällen sogar Einheiten des vollen Ringklassenkörpers modulo f von $(\sqrt{-3})$ sind. (5) ist Sonderfall einer Formel für die Klassenzahl eines Körpers K , dessen Normalkörper N abelsch über einem quadratischen Körper Ω ist (C. Meyer, Berechnung der Klassenzahl für Zahlkörper, deren galoisscher Körper über einem quadratischen Zahlkörper abelsch ist. Diss. Berlin 1950). — § 4. Die elliptische Normfunktion $S(u|\mathfrak{w})$ wird definiert:

$$S(u|\mathfrak{w}) = |e^{-u u^*/2} \Delta_{12}(\mathfrak{w}) \sigma(u|\mathfrak{w})|^2,$$

dabei ist $u \rightarrow u^*$ die affine Abbildung der u -Ebene, die \mathfrak{w} in das Gitter \mathfrak{w}^* überführt, das dem Gitter \mathfrak{w} durch $\omega \rightarrow \omega^*(\omega|\mathfrak{w})$ zugeordnet ist (vgl. § 2). $S(u|\mathfrak{w})$ ist doppeltperiodisch mit dem Periodengitter \mathfrak{w} , ist als Funktion von ω_1, ω_2 Modulfunktion erster Stufe, sie ist homogen von der Dimension 0 in u, ω_1, ω_2 , sie ist endlich und positiv für $u \in \mathfrak{w}$. Wird zu einer gegebenen Strahlklasse \mathfrak{f} modulo f des imaginären quadratischen Körpers Ω ein Ideal \mathfrak{r} aus \mathfrak{f} und ein Ideal \mathfrak{a} mit $\mathfrak{r}\mathfrak{a}/\mathfrak{f} = (\rho)$ bestimmt, so ist $S(\rho|\mathfrak{a})$ eine Invariante $S(\mathfrak{f})$ des Paares $\mathfrak{f}, \mathfrak{a}$. Die in der Klassenzahlformel für reelle quadratische Körper auftretenden Kreiseinheiten $\left(\left| 2 \sin \frac{\pi a}{b} \right|, \frac{a}{b} \text{ rational} \right)$ lassen vermuten, daß die $S(\mathfrak{f})$ assoziierte Zahlen des Strahlklassenkörpers mod. \mathfrak{f} von Ω sind. — § 5. Ω sei ein reeller quadratischer Körper. Einem Zahlenpaar u, u' aus Ω wird die Funktion $u(x) = u x + i u' x^{-1}$ der positiven Variablen x zugeordnet. ω_1, ω'_1 und ω_2, ω'_2 seien zwei feste Zahlenpaare aus Ω , durch $\omega(x) = n_1 \omega_1(x) + n_2 \omega_2(x)$ ($n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$) ist ein Gitter $\mathfrak{w}(x)$ mit von x unabhängigem Grundmascheninhalt $|\mathfrak{w}|$ definiert. Durch $\log D_{x_0}^{x_1} \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega'_1 \\ \omega_2 & \omega'_2 \end{pmatrix} = \int_{x_0}^{x_1} \log D(\mathfrak{w}(x)) \frac{dx}{x}$, $\log S_{x_0}^{x_1} \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega'_1 \\ \omega_2 & \omega'_2 \end{pmatrix} = \int_{x_0}^{x_1} \log S(u(x)|\mathfrak{w}(x)) \frac{dx}{x}$ werden zwei reellwertige Funktionen $D_{x_0}^{x_1}, S_{x_0}^{x_1}$ definiert, $x_0, x_1 > 0, u, u'$ reell. Beide sind invariant bei der vollen Modul-

gruppe, deren Elemente simultan auf ω_1, ω'_1 anzuwenden sind. Ist λ, λ' irgendein Zahlenpaar aus Ω , $\lambda \lambda' \neq 0$, so gelten die Homogenitätsrelationen

$$D_{\tau_0}^{x_1} \begin{pmatrix} \lambda \omega_1, & \lambda' \omega'_1 \\ \lambda \omega_2, & \lambda' \omega'_2 \end{pmatrix} = D_{\tau_0}^{x_1} \begin{pmatrix} \omega_1 \omega'_1 \\ \omega_2 \omega'_2 \end{pmatrix},$$

$$S_{x_0}^{x_1} \begin{pmatrix} \lambda u, \lambda' u'; & \lambda \omega_1 \lambda' \omega'_1 \\ & \lambda \omega_2 \lambda' \omega'_2 \end{pmatrix} = S_{x_0}^{x_1} \begin{pmatrix} u, u'; & \omega_1 \omega'_1 \\ & \omega_2 \omega'_2 \end{pmatrix}, \quad l = \left| \frac{\lambda}{\lambda'} \right|.$$

$S_{x_0}^{x_1}$ ist im Variabeln paar u, u' doppeltperiodisch mit den Grundperioden ω_1, ω'_1 und ω_2, ω'_2 . Beide Funktionen bleiben ungeändert, wenn u, ω_1, ω_2 mit u', ω'_1, ω'_2 vertauscht werden. Die Funktionswerte sind endlich und positiv, außer wenn u, u' eine Periode ist. — Seien a ein Modul von Ω , ϱ eine Zahl von Ω , α', ϱ' die Konjugierten. Haben a, ϱ die gleiche Bedeutung wie in § 3, § 4, ist $\varepsilon > 1$ Grundeinheit der Ordnung von a bzw. des Strahls mod f und α_1, α_2 eine Basis von a , so ist $D_1^{\begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha'_1 \\ \alpha_2 \alpha'_2 \end{pmatrix}}$ eine Klasseninvariante der Ordnung von a und $S_1^{\varepsilon} \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha'_1 \\ \alpha_2 \alpha'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho, \varrho' \end{pmatrix}$ eine Invariante der Strahlklasse modulo f von a . Sie treten bei der Klassenzahlberechnung von C. Meyer auf. Verf. vermutet, daß sie für die analytische Konstruktion der Klassenkörper von Ω von Bedeutung sind.

Max Deuring.

Herstein, Israel Nathan: Divisor algebras. Amer. J. Math. 71, 800—822 (1949).

Absicht der vorliegenden Arbeit ist die axiomatische Begründung der Divisorenalgebren algebraischer Funktionkörper vom Transzendenzgrad 1 über algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörpern. — Eine vorgegebene Menge von Primdivisoren P , die Riemannsche Fläche \mathfrak{R} , erzeugt die freie Abelsche Gruppe \mathfrak{G} der Divisoren. Durch die Exponenten der Darstellung $D = \Pi P^\alpha$ können ganze Divisoren ausgezeichnet, der Begriff der Teilbarkeit und die Ordnung $n(D) = \Sigma \alpha$ erklärt werden. I sei die Einheit von \mathfrak{G} . — In \mathfrak{G} wird eine Hauptuntergruppe \mathfrak{H} , deren Elemente Hauptdivisoren heißen, ausgezeichnet und damit eine Äquivalenz $A \sim B$ nach § in \mathfrak{G} festgelegt. Schließlich wird für äquivalente Divisoren eine Abhängigkeit festgelegt: Für jede Reihe äquivalenter Divisoren A_1, \dots, A_n kann entschieden werden, ob sie abhängig oder unabhängig sind. Sind A_1, \dots, A_n unabhängig, aber A_1, \dots, A_s, B abhängig für ein $s \leq n$, so heißt B abhängig von A_1, \dots, A_n . — Die Eigenschaften der so erklärten Grundbegriffe werden nun durch Axiome festgelegt: 1. $\mathfrak{H} \neq I$. 2. Wenn $A \sim B$, dann $n(A) = n(B)$. 3. Abhängigkeitsaxiome: a) Ist A abhängig von B_1, \dots, B_n , aber nicht von B_1, \dots, B_{n-1} , so ist B_n abhängig von A, B_1, \dots, B_{n-1} . b) Ist A abhängig von B_1, \dots, B_n , jedes B_i abhängig von C_1, \dots, C_m , so ist A abhängig von C_1, \dots, C_m . c) Sind A_1, \dots, A_m sowie B_1, \dots, B_n unabhängig, aber insgesamt abhängig, so gibt es einen Divisor D , der sowohl von A_1, \dots, A_n als auch von B_1, \dots, B_m abhängig ist. d) A, B sind dann und nur dann abhängig, wenn $A = B$. 4. Sind A_1, \dots, A_n abhängig, so sind für alle Divisoren X auch $A_1 X, \dots, A_n X$ abhängig. 5. Ist B abhängig von den ganzen A_1, \dots, A_n , so ist auch B ganz. 6. Sind A, B ganz, unabhängig und P ein Primdivisor, so gibt es einen von A, B abhängigen Divisor D_P , den P teilt. — Auf diesen Axiomen kann die Theorie der linearen Familien $F = [A_1, \dots, A_n]$, die Menge der von A_1, \dots, A_n abhängigen Divisoren entwickelt werden; die Maximalzahl s unabhängiger Divisoren einer Familie ist die Dimension $\dim [A_1, \dots, A_n]$. Daraus ergibt sich: Die ganzen Divisoren einer Klasse bilden einen endlichdimensionalen projektiven Desarguesschen Raum. Erklärt man nun in diesen Räumen Perspektivitäten, Projektivitäten und Multiprojektivitäten als endliche Produkte von Perspektivitäten und Projektivitäten, so kann das Axiomensystem durch das letzte Axiom 7. „Die identische Abbildung ist die einzige Multiprojektivität, die drei verschiedene abhängige Punkte festläßt“, abgeschlossen werden. Es werden der zugehörige Funktionenkörper konstruiert und seine wichtigsten algebraischen Eigenschaften aufgewiesen.

Wilhelm Specht.

Nagell, Trygve: Sur quelques questions dans la théorie arithmétique des cubiques planes du premier genre. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 24 (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25. 9.—1. 10. 1949), 59—64 (1950).

Ein kurzgefaßter, aber reichhaltiger Bericht über die neueren Resultate und Probleme der arithmetischen Theorie der ebenen arithmetischen Kurven 3. Ordnung, an deren Entwicklung Verf. selbst einen großen Anteil hat. Entsprechend der Absicht des Verf., einen Leitfaden zu weiteren Untersuchungen zu geben, beschränkt er sich auf die Zusammenstellung der grundlegenden Definitionen und Mitteilung der Sätze, für den Beweis weist er auf die Originalarbeiten hin, bei einigen Fragen skizziert er aber auch den Beweisgang. Es werden die folgenden Hauptfragen der Theorie besprochen: Rationale Punkte („rational“ heißt „im Grundkörper liegend“) und rationale Punktsysteme auf einer Kurve 3. Ordnung, Basiszahl der Gruppe der rationalen Punkte, Resolventenkörper, Zusammenhang der Invarianten mit der Frage der Äquivalenz, außergewöhnliche Punkte („points exceptionnelles“).

Ladislav Rédei.

Zahlentheorie:

● **Sierpiński, Wacław:** *Zahlentheorie*. 3. erweiterte Aufl. (Monografie Matematyczne Tom XIX.) Warszawa: Państwowy Instytut Matematyczny 1950. Wrocław: Seminarium Matematyczne Gmach Politechniki 1950. 544 S. [Polnisch].

This is a delightful book on the elementary theory of numbers which makes use of results as recent as the last few years. Its 19 chapters have the following headings: (1) Divisibility of numbers, and decomposition into factors. (2) Indeterminate equations of the first degree. (3) Fundamental properties of congruences. Congruences of the first degree modulo a prime. (4) Theorems of Wilson, Euler and Fermat. Theorems on the decompositions into 2, 3 and 4 squares. (5) Number and sum of divisors. Perfect numbers. Sum functions. (6) The functions of Möbius and Gauss. The relation $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ and its inversion. (7) The density of the

prime numbers in the sequence of the positive integers (Theorem of Tchebycheff). (8) The Theorems of Euler and Lagrange (on congruences). Primitive roots and indices. (9) The systematic developments with respect to an arbitrary basis of numeration. (10) The Pythagorean equation and its generalization (Fermat's last theorem for $n = 4$). (11) Pell's equation. (12) Continued fractions. (13) The theory of the congruences of the first and second degrees. (14) The theory of the symbols of Legendre and Jacobi. (15) A sketch of the theory of quadratic forms. (16) The theory of the complex (Gaussian) integers. (17) Introduction to the theory of number fields (Fermat's last theorem for $n = 3$). (18) Introduction to the theory of ideals. (19) Fermat's last theorem for the exponents 5 and 7. — There follows a final section of selected problems to the previous text. — These short titles give little idea of the wealth of material dealt with. Everywhere the connection of the classical theory with often quite recent work is established, and if proofs are too deep or involved, then the reference to the original work are given; one similarly finds many references for classical results. The text is full of interesting identities and there are many examples and problems, mostly with solution. *Kurt Mahler*.

● **Neville, E. H.:** *The Farey series of order 1025*. Cambridge: At the University Press 1950. 440 p. £ 5,5 s. net.

Kanold, Hans-Joachim: *Sätze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretische Probleme*. II. J. reine angew. Math. 188, 129—146 (1950).

Als leichte Anwendung der Resultate des Teils I (dies. Zbl. 35, 311) wird bewiesen: Für $m > 6$ gibt es eine Primzahl $q \equiv 1 \pmod{m}$, $0 < q < 5^{\varphi(m)/2}$. Ferner gilt: Die Gleichung $F_p(q^a) = b^p$ (p, q Primzahlen, $a, b, > 0$ ganz) hat nur die zwei Lösungen $p = q = 2$, $a = b = 3$ und $p = 2$, $q = 3$, $a = 1$, $b = 2$. Die Kombination mit einem Nagellschen Satz ergibt: Die Gleichung $1 + q^a + q^{2a} = b^n$ ($n > 1$) ist unmöglich. Es folgen noch weitere ähnliche Sätze, die dann auf das Problem der ungeraden vollkommenen Zahlen angewendet werden. Das Hauptresultat lautet: Die ungerade Zahl $n = p^\alpha q_1^{2\beta_1} q_2^{2\beta_2} \cdots q_r^{2\beta_r}$ ($\beta_1 < 5$) ist nicht vollkommen (p, q_1, \dots, q_r verschiedene Primzahlen). Hiervon hat Verf. den Fall $\beta_1 = 2$ schon früher bekommen (dies. Zbl. 26, 296). *Ladislav Rédei*.

Palamà, Giuseppe: *Tabella delle posizioni iniziali relative al „Neocribum“ di L. Poletti*. Rivista Mat. Univ. Parma 1, 85—98 (1950).

Verf. gibt zunächst eine Tabelle der 64 Lösungen r_j von $30r_j \equiv m_{j-1} \pmod{30l + m_j}$, $30l + m_j = p$ Primzahl, $\{m_1, \dots, m_8\}$ kleinstes positives reduziertes Restsystem mod 30 ($= 2 \cdot 3 \cdot 5$), wachsend geordnet; oder was dasselbe ist, von $30(r_j - 1) + m_j \equiv 0 \pmod{30l + m_j}$. (Jede Primzahl p ist ja durch $p = 30l + m_j$ darstellbar.) Z. B. ist $r_1 \equiv l + 1 \pmod{30l + 1}$ oder $r_1 \equiv 13l + 4 \pmod{30l + 7}$ usw. Es folgt eine 8-spaltige numerische Tabelle hierfür, und zwar für $17 \leq p \leq 3547$. In einer 9-ten Spalte sind überdies die kleinsten positiven Lösungen h von $h \equiv -1001 \pmod{p}$ angegeben, so daß man die Kongruenz $30030 + 30(h + r_j - 1) + m_j \equiv 0 \equiv 30(r_j - 1 + h + 1001) + m_j \pmod{p}$ für die erwähnten p beherrscht. Die Tafeln sind nützlich zum Zweck der Aufstellung von Faktortafeln, die auf $30030 (= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13)$ beruhen.

Hans-Heinrich Ostmann.

Ljunggren, Wilhelm: *A theorem on the elementary symmetric functions of the n first odd numbers*. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 19, Nr. 5, 14—17 (1947).

Verallgemeinerung eines Satzes von R. Tambs Lyche (Vid. Akad. Avhand., Oslo, I No. 9, 1944) über einen Zusammenhang zwischen den Potenzen von 2, die Teiler der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ bzw. der entsprechenden elementaren symmetrischen Funktionen s_k^n der ersten n ungeraden Zahlen vom Grade k für irgendein n sind. Setzt man $n = 2^r n_1$, $r \geq 1$, n_1 ungerade, ferner mittels der Bernoullischen Zahlen B_t ($B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, ...) $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -\frac{1}{2}$, $\beta_{2t} = (-1)^{t-1} B_t$, $\beta_{2t+1} = 0$ ($t \geq 1$), so gilt die (symbolische Potenzen von β enthaltende) Kongruenz

$$\frac{s_{2q}^n}{\binom{n}{2q}} \equiv \frac{s_{2q+1}^n}{n^2 \binom{n-1}{2q}} \equiv (1 + 4\beta)^{2q} \pmod{2^r}.$$

Verf. gewinnt daraus durch Anwendung der Formel auf s_{n-1}^n ($n = 2^r$, $r \geq 2$) einen Satz über die Teilbarkeit von $\binom{p^{r+1}}{p^r} - \binom{p^r}{p^{r-1}}$ durch eine Potenz von p , p Primzahl (dies. Zbl. 30, 198) für den Fall $p = 2$:

$$2^{3r} \left| \binom{2^{r+1}}{2^r} - \binom{2^r}{2^{r-1}} \right|.$$

Ferner gibt Verf. eine Verallgemeinerung eines Satzes von E. Jacobsthal:

$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{(2s+1)^k} \begin{cases} \equiv -4 \binom{h+1}{2} n^2 - n^2 \sum_{s=0}^{[r/2]} (2s+1) \binom{h+2s}{h-1} \beta_{2s} 2^{4s} \pmod{2^{4r+1}} & \text{für } h \equiv 1 \pmod{2}, \\ \equiv 2hn + n \sum_{s=0}^{[(r+1)/2]} \binom{h+2s-1}{h-1} \beta_{2s} 2^{4s} \pmod{2^{3r+2}} & \text{für } h \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Hans-Heinrich Ostmann.

Skolem, Th.: On the diophantine equation $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 = 0$. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 21, Nr. 19, 76—79 (1949).

Verf. gab in seinem Buch „Diophantische Gleichungen“ (Berlin 1938) einen Beweis für den bekannten Satz, daß die im Titel genannte diophantische Gleichung lösbar ist, wenn sie nach jedem rationalen (endlichen und unendlichen) Modul lösbar ist. Hier gibt er einen neuen Beweis, der sich nur auf das Lösbarkeitskriterium von $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ und auf die Lösbarkeit von

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = e, \left(\frac{2}{p}\right) = e', \left(\frac{p}{p_1}\right) = e_1, \dots, \left(\frac{p}{p_n}\right) = e_n$$

durch eine Primzahl p stützt, wobei p_1, \dots, p_n beliebige ungerade Primzahlen und e, \dots, e_n beliebige Zahlen ± 1 sind. Der Beweis ist völlig elementar und geschieht durch Zurückführung auf die Lösbarkeit von Gleichungen von der Form

$$ax^2 + by^2 = pfgv^2, \quad -cz^2 - dw^2 = pfgw^2,$$

wo p, f, g von a, b, c, d abhängen. (Auch Fallunterscheidungen sind nötig.)

Ladislav Rédei.

Obláth, Richard: Berichtigung zum Aufsätze „Über die diophantische Gleichung $x^3 - 1 = 2y^2$ “. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 1, 321—322 (1950).

Vgl. dies. Zbl. 39, 34.

Palamà, G.: Multigrade con termini uguali o primi. Generalizzazione di teoremi delle multigrade. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 8, 60—76 (1949).

Palamà, G.: Multigrade normali del 9° ordine inverso del teorema di Gloden. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 9, 228—236 (1950).

Unter mehrgradigen Gleichungen versteht man Identitäten der Art

$$a_1^k + \dots + a_p^k = b_1^k + \dots + b_q^k,$$

worüber A. Gloden ein Buch und mehrere Arbeiten verfaßte. Verf. entwickelt eine neue Methode, um Lösungen zu finden, was ihm für mehrere Werte von k (≥ 9) gelingt. Für $k=9$ findet er eine neue Lösung mit je 10 Gliedern ($p=q=10$), wobei die Basiszahlen (a_j, b_j) 11- bis 13-stellige Zahlen sind. — Aus Identitäten $A_1^k + \dots + A_5^k = B_1^k + \dots + B_5^k$ und zusätzlichen Voraussetzungen kann auf Identitäten $a_1^k + a_2^k + a_3^k = b_1^k + b_2^k + b_3^k$ ($k=2, 4$) geschlossen werden, womit die Umkehrung eines Theorems von Gloden erzielt wird. *N. Hofreiter.*

Buquet, A.: L'équation diophantienne $f(t) \equiv At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E = s^2$ (1) en nombres rationnels et les polygones de Poncelet. Mathesis 59, 233—236 (1950).

Setzt man nach Euler in der Gleichung der Überschrift $s = P t^2 + Q t + R$, wo P, Q, R linear von einem Parameter m abhängen, so erhält man die in zweifacher Hinsicht quadratische Gleichung

$$(2) \quad (p m^2 + q m + r) t^2 + (p' m^2 + q' m + r') t + p'' m^2 + q'' m + r'' = 0,$$

die den beiden Forderungen gleichwertig ist, daß

$$(1') \quad (q t^2 + q' t + q'')^2 - 4 (p t^2 + p' t + p'') (r t^2 + r' t + r'') = \square,$$

$$(3) \quad (p' m^2 + q' m + r')^2 - 4 (p m^2 + q m + r) (p'' m^2 + q'' m + r'') = \square$$

Quadrate seien; davon kommt (1') auf (1) zurück, (3) tritt als Gefolgsleichung auf. Die Kenntnis einer Lösung t_1 von (1) zieht durch Auflösung einer Folge quadratischer Gleichungen die Bildung einer beiderseitig unbegrenzten Folge von Lösungen (4) $\dots, t_{-3}, m_{-2}, t_{-1}, m_0, t_1, m_2, t_3, m_4, \dots$ der Gleichungen (1') und (3) nach sich. — Zahlenbeispiel: (4) $\dots, t = 1, m = 1, t = -5/2, m = 3/17, \dots$; (2) $(m^2 + 1)t^2 + (2m + 1)t - 2m^2 - 3 = 0$, (3) $8m^4 + 24m^2 + 4m + 13 = \square$, (1') $-t^4 - t^3 + 6t^2 + 2t - 6 = \square$. — Um den geometrischen Teil der Überschrift einzubeziehen, fasse man (2) als Ausdruck dafür auf, daß die Tangente (m) eines Kegelschnitts Γ , die die Linienkoordinaten $u = p m^2 + q m + r$, $v = p' m^2 + q' m + r'$, $w = p'' m^2 + q'' m + r''$ besitzt, die Parabel Π mit der punktartigen Parameterdarstellung $x = t^2, y = t, z = 1$ im Punkte (t) trifft. Der Folge (4) entspricht dann ein Ponceletsches Vieleck (P. V.) in Π , dessen anstoßende Seiten $\dots, T_{-3} T_{-1}, T_{-1} T_1, T_1 T_3 \dots$ mit den Parametern $\dots, m_{-2}, m_0, m_2, \dots$ Γ berühren. Daher heiße (4) Euler-Ponceletsche Kette. — Diesen geometrischen Befund entwickelt Verf. zur Herstellung von Lösungen der Aufgabe (1) in folgender Weise weiter: Als umgeschriebenen Kegelschnitt wählt er Π , als eingeschriebenen ein Mitglied Γ_λ eines in λ linearen, Π enthaltenden Kegelschnittbüschels, dessen Grundpunkte sich durch die als verschieden angenommenen Wurzeln der Gleichung $f(t) = 0$ bestimmen. Die Ecken des P. V. findet man mittels der Gleichung $\Phi(t, t'; \lambda) \equiv \Phi(t', t; \lambda) = 0$, die ausdrückt, daß die Sehne durch die Punkte t, t' von Π der Gleichung von Γ_λ in Linienkoordinaten genügt. Kennzeichnend dafür, daß $\Phi = 0$ in rationalen Zahlen lösbar sei, ist dieselbe Eigenschaft bei der Gleichung $f(t) \varphi(\lambda) = \square$, deren linke Seite die Diskriminante von Φ in bezug auf t' bedeutet. — Zu mannigfachen weiteren Bemerkungen geben Zahlenbeispiele Anlaß, bei denen es hier mit der Angabe von $f(t)$ bewenden muß: a) $2t^4 - 4t + 3$; b) $t^4 + 3t^3 + 1$; c) $t^4 + 44t^2 + 1$ (Euler); d) $5t^4 - 23t^2 + 27$; e) $t^4 - 47t^2 + 4096$ (Rignaux).

Lothar Koschmieder.

Errera, A.: Un problème diophantien de M. Segre. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 19, 177—186, Addenda: 213—214 (1950).

Gefragt wird nach den rationalen Lösungen der bei Problemen der algebraischen Geometrie aufgetretenen Gleichung $y^2 = 3x(x^2 + x + 1)$. Die Antwort lautet: Die einzigen rationalen Lösungen sind: $x = 0, y = 0$; $x = 1, y = \pm 3$. Der Beweis erfolgt mit elementaren zahlentheoretischen Überlegungen. Zunächst werden die ganzzahligen Lösungen $y^2 = p^u x(x^2 + x + 1)$ (p Primzahl) ermittelt, dann die ganzzahligen Lösungen von $y^2 z = 3x(x^2 + xz + z^2)$ mit $(x, y, z) = 1$,

worauf die Fälle $3\frac{1}{2}z$ und $3|z$ diskutiert werden. Dabei treten langwierige Fallunterscheidungen auf. — Im Addenda wird eine auf Seite 183 vorhandene kleine Lücke ergänzt.

N. Hofreiter.

Errera, A.: Un problème diophantien de M. Segre. Extrait d'une lettre de M. Siegel. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **19**, 404—405 (1950).

Eine weitere Lücke auf Seite 186 der vorsteh. referierten Arbeit wird von Siegel mittels der descente infinie behoben. Ferner zeigt Siegel, wie man den Beweis vereinfachen kann.

N. Hofreiter.

Mardžanišvili, K. K.: Über eine Verallgemeinerung des Waringschen Problems. Soobščeniija Akad. Nauk Gruzinskoi SSR **11**, 81—84 (1950) [Russisch].

The author announces results very similar to those which he has announced in another note (this Zbl. **38**, 27), except that in the present paper the unknowns in the system of Diophantine equations considered are not required to be prime numbers.

Paul T. Bateman.

Selberg, Atle: On an elementary method in the theory of primes. Norske Vid. Selsk. Forhdl. **19**, Nr. 18, 64—67 (1947).

Verf. skizziert eine „elementare“ Methode, die auf dieselben Probleme wie die Siebmethode von Brun anwendbar ist und bessere Ergebnisse als diese liefert. Ist a eine Folge von N ganzen Zahlen, so besteht für die Anzahl N_z derjenigen a , die durch keine Primzahl $\leq z$ teilbar sind, mit $\lambda_1 = 1$ und beliebigen reellen $\lambda_v (v = 2, \dots, z)$ die Ungleichung $N_z \leq \sum_a \left\{ \sum_{v|a} \lambda_v \right\}^2$. Daraus wird, wenn eine Formel

$$\sum_{a|a} 1 = \frac{1}{f(\varrho)} N + R_\varrho \text{ mit multiplikativem } f(\varrho) \text{ gilt, } N_z \leq N \sum_{v_1, v_2} \frac{\lambda_{v_1}}{f(v_1)} \frac{\lambda_{v_2}}{f(v_2)} f((v_1, v_2)) + R.$$

Die $\lambda_2, \dots, \lambda_z$ werden so bestimmt, daß die Summe ein Minimum wird, und man erhält dann eine Abschätzung von N_z , aus der sich ergibt, daß die Anzahl der Primzahlzwillinge unterhalb x für $x \geq x_0$ kleiner ist als $10,6 x / \log^2 x$.

B. Schoeneberg.

Bateman, P. T. and S. Chowla: Averages of character sums. Proc. Amer. math. Soc. **1**, 781—787 (1950).

Let χ be a primitive character, mod k , $k > 0$. Let $S(m) = \sum_{0 \leq l \leq m} \chi(l)$ and

$$T(n) = \sum_{0 \leq m \leq n} S(m). \text{ Hua proved that } |T(n)| \leq \frac{n}{2} (k^{\frac{1}{2}} - n k^{-\frac{1}{2}}) \text{ if } \chi(-1) = 1$$

and $0 \leq n \leq k$. By means of this result, the authors give a very simple proof of a result due to Davenport, namely, for $0 < \sigma = R(s) < 1$, then $|L(s, \chi)| \leq \frac{|s(s+1)|}{\sigma(1-\sigma)} k^{\frac{1}{2}(1-\sigma)}$, for $\chi(-1) = 1$. In case $\chi(-1) = -1$, instead of Hua's result

$$\text{they obtained the inequality } \left| T(n) - \frac{\tau(\chi)}{\pi i} L(1, \chi) n \right| < n \left(2 \cdot 1 + \frac{\pi}{4} \log \frac{1}{\alpha} \right) k^{\frac{1}{2}},$$

where $\alpha k \leq n \leq k$. But it is not sharp enough to give a new proof of Davenport's theorem for the case $\chi(-1) = -1$. By means of a result due to Chowla, i. e. for

$$\chi(-1) = -1 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{L(1, \chi)}{\log \log k} \geq e^\gamma, \text{ they deduce also } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tau(k)}{k^{\frac{1}{2}} \log \log k} \geq \frac{e^\gamma}{\pi},$$

which is an improvement of a theorem due to Paley.

Loo-Keng Hua.

Revuz, André: Sur la répartition des points $e^{2\pi i \theta}$. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1466—1467 (1949).

Bekanntlich [vgl. H. Weyl, Math. Ann. **77**, 313—352 (1916)] liegen die Punkte $(\nu \alpha) = \nu \alpha - [\nu \alpha] - \frac{1}{2}$ im Intervall $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gleichverteilt. Hier bedeutet α eine Irrationalzahl, $\nu = 1, 2, \dots$. Verf. behandelt die Frage, für welche ν die Zahl $(\nu \alpha)$ einem gegebenen Teilintervall von $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ angehört. Es werden einige Sätze ausgesprochen, die sich auf den Zusammenhang zwischen der Lage von $(\nu \alpha)$ und der eindeutigen Darstellung von ν als $\nu = a_0 Q_0 + a_1 Q_1 + \dots$ beziehen. (Hier be-

deuten die Q_k die Näherungsnenner der Kettenbruchentwicklung von α , während a_0, a_1, \dots natürliche Zahlen sind, für welche $a_k \leq \mu_{k+1}$ gilt; μ_k sind die unvollständigen Quotienten der Kettenbruchentwicklung von α .) Ich erwähne nur den Satz 2. Ist a_n der erste nicht verschwindende Koeffizient in der Darstellung $v = a_0 Q_0 + \dots$, so gilt

$$(a_n - 1) \mu_{n+2} / Q_{n+2} + \mu_{n+3} / Q_{n+3} < |(v \alpha)| < a_n / Q_{n+2} + 1 / Q_{n+2}.$$

Die Arbeit enthält keine Beweise, ihre Sätze lassen sich aber zum Teil leicht aus den bekannten Formeln der Kettenbruchlehre folgern. P. Szűsz.

Skolem, Th.: A proof of the algebraic independence of certain values of the exponential function. Norske Vid. Selks. Forhdl. 19, Nr. 12, 40—43 (1947).

Es wird ein eleganter Beweis für den Lindemannschen Satz, der die algebraische Unabhängigkeit der Potenzen $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$ bei über dem Körper der rationalen Zahlen linear unabhängigen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ aussagt, gegeben; der Beweis schlägt den Weg der bekannten klassischen Beweise dieses Satzes ein, benutzt den Hermite'schen Integralansatz und gestaltet sich auf Grund der besonderen Wahl des dort unter dem Integranden auftretenden Polynoms und geschickter Fassung der Hilfsbetrachtungen sehr einfach in dem Sinne, daß größere Abschätzungen vermieden werden. Theodor Schneider.

Analysis.

Mengenlehre:

● **Hausdorff, F.: Grundzüge der Mengenlehre.** Reprint. New York: Chelsea Co. 1949. VIII, 476 p. \$ 4,95.

Ljapunov, A. A. und P. S. Novikov: Deskriptive Mengenlehre. Matematika v SSSR 1917—1947, 243—255 (1948) [Russisch].

Eindrucksvoller Bericht über die Entwicklung der deskriptiven Mengenlehre in Rußland. Im Mittelpunkt stehen Arbeit und Ausstrahlung von N. N. Lusin und seiner Schule. — Im übrigen wird die Theorie der analytischen oder A -Mengen, in ihren Hauptzügen mit genauer Angabe der Sätze, verfolgt, und die der B - und C -Mengen gegenüber oder danebengestellt. Die einschlägigen Beiträge von Lusin und seinen Schülern, sowie anderen, vor allem Leningrader Mathematikern (L. V. Kantorovič, Livenson) sind in organischem Zusammenhang geordnet dargestellt (u. a. Glivenko, Keldyš, Kolmogorov, Lavrentiev, Ljapunov, Novikov, Selivanovskij; P. S. Alexandroff und P. Urysohn; Arsenin, Očan, J. A. Vainštejn, Tajmanov). Da das Gebiet in ganz besonderem Maße in Rußland gepflegt wurde, ist der Bericht von dokumentarischer Bedeutung. — Er wird ergänzt durch eine ausführliche Bibliographie, in der alle Gebiete von der Mengenlehre bis in die komplexe Funktionentheorie zusammengefaßt sind (dies. Zbl. 41, 22).

Egon Ullrich.

Lorent, H.: Un postulat implicite de la théorie des ensembles. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 19, 194—196 (1950).

The author believes there is a certain inadequacy in some proofs in classical mathematics in which a property of a non-denumerable set is derived from properties of denumerable sub-sets of it. He illustrates his objection by the definition and proof of existence of the Riemann integral of a continuous function. He suggests that this objection can be overcome by basing the argument on the following postulate. „Let a denumerable set of denumerable sets (E_1) be extracted from a set (E) which has the power of the continuum; if all the sets (E_1) have a common property then this property belongs also to the set (E).“ He does not explain what he means by „property“ here which is a pity since the postulate is clearly false if this word is given its usual meaning in classical mathematics. Shepherdson.

Iseki, Kiyosi: On a proposition which is equivalent to the axiom of choice. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part I 2, 109 (1950).

Proof that the choice axiom is equivalent with the hypothesis that every infinite cardinal number is indecomposable (not sum of two cardinals smaller than it; for every couple of infinite cardinals a, b one has $a + b \in \{a, b\}$). The direct implication is well known. On the other hand, the relation $a + b \in \{a, b\}$ implies the comparability of a and b ; the comparability of every two cardinals implies (Hartogs) the choice axioms.

George Kurepa.

Tsuchikura, Tamotsu: Quelques propositions équivalentes à l'hypothèse du continu. Tôhoku math J., II. Ser. 1, 69—76 (1949).

En étudiant trois conséquences de l'hypothèse H du continu, à savoir les propositions C_9 et C_{10} de Sierpiński et la proposition C_{11} de Banach-Kuratowski (v. W. Sierpiński, Hypothèse du continu, Monografie mat. IV, Warszawa 1934; en particulier, 52—54, 59; v. aussi ce Zbl. 9, 302—303) l'A. trouve trois propositions: P, R, Q respectivement, dont chacune est équivalente à H . Par exemple, la proposition P s'énonce comme suit: Il existe une suite infinie $f_n(x)$ ($x \in C_1 \equiv$ le continu linéaire des nombres réels) de fonctions réelles telle que: I. $\lim f_n(x) = 0$

($x \in C_1$). II. la convergence de la suite n'est uniforme sur aucun $X \subseteq C_1$ infini non dénombrable (c'est bien ainsi qu'il faut lire la seconde condition de P), III. quels que soient $K \subseteq C_1$ de puissance du continu et $x, x' \in K$ l'une des limites supérieures de $f_n(x)/f_n(x')$ et $f_n(x')/f_n(x)$ est finie. La démonstration est fondée sur la proposition de du Bois-Reymond d'après laquelle, quelle que soit la famille dénombrable Φ de suites de nombres réelles $\rightarrow 0$, il existe une suite de nombres réels tendant vers 0 plus lentement que chaque $s \in \Phi$.

Georges Kurepa.

Bachmann, Heinz: Die Normalfunktionen und das Problem der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 95, 115—147 (1950).

Das genannte Problem lautet: jeder Limeszahl $\eta < \omega_1$ eine wohldefinierte aufsteigende ω -Folge η_n von Ordnungszahlen $< \eta$ zuzuordnen, so daß $\eta = \lim \eta_n$. Mit Hilfe von Normalfunktionen hat Veblen [Trans. Amer. math. Soc. 9, 280—292 (1908)] das Problem für einen Anfangsabschnitt der wohlgeordneten Menge der Zahlen $< \omega_1$ gelöst. Nun modifiziert Verf. die Veblensche Methode, damit sie leichter verallgemeinerungsfähig wird, und löst das obige Problem für einen noch größeren Anfangsabschnitt der Zahlenreihe $< \omega_1$, indem er in § 5 zunächst eine Folge vom Typus $\omega_2 + 2$ von Normalfunktionen zweiter Klasse F_ζ ($\zeta \leq \omega_2 + 1$) für $1 \leq \xi < \omega_2$ folgendermaßen definiert: $F_0(\xi) = \omega_2^{\xi}$, $F_{\omega_2+1} = F_{\omega_2}'$ ($0 \leq \zeta \leq \omega_2$), $V F_\zeta = \bigcap_{\zeta' < \zeta} V F_{\zeta'}$ für jede Limeszahl $\zeta < \omega_2$, $F_{\omega_2}(\xi) = F_\xi(1)$. Mit Hilfe der Funktionen F_ζ ($\zeta \leq \omega_2 + 1$) wird (S. 130) eine Folge Φ_1 vom Typus $\tau = F_{\omega_2+1}(1) + 1$ von Normalfunktionen φ_n erster Klasse bestimmt, so daß für alle $\eta \leq \tau$ und $1 \leq \xi < \omega_1$ gilt: 1. a) $\varphi_0(\xi) = \omega_2^{\xi}$; b) ist $\eta = \eta' + 1$, so $\varphi_\eta = \varphi_{\eta}'$; c) ist η mit ω_0 kofinal und $\eta \rightarrow \lim_{\xi < \tau_\eta} \eta_\xi$, so ist $V \varphi_\eta = \bigcap_{\xi < \tau_\eta} V \varphi_{\eta_\xi}$; d) ist η mit ω_2 kofinal und $\eta \Rightarrow \lim_{\xi < \omega_2} \eta_\xi$, so ist $\varphi_\eta(\xi) = \varphi_{\eta_\xi}(1)$. 2. Ist $\eta \Rightarrow \lim_{\xi < \tau_\eta} \eta_\xi$, so gilt $\eta_\mu \Rightarrow \lim_{\xi < \mu} \eta_\xi$ für jede Limeszahl $\mu < \tau_\eta$; für jedes $\xi < \tau_\eta$ hat man außerdem $V \varphi_{\eta_\xi+1} \supseteq \bigcup_{\zeta} V \varphi_\zeta$ ($\eta_\xi + 1 < \zeta \leq \eta_{\xi+1}$). Mit

Hilfe von Φ_1 löst nun Verf. (S. 135/6) das obengenannte Problem für jede Limeszahl $\eta < H(1)$, wo $H(1) = \varphi_\alpha(1)$, $\alpha = F_{\omega_1}(1) + 1$. [Veblen löste das Problem für $\eta < E(1) = \varphi_\alpha(1)$, wo $\alpha = \omega_1^{\omega_1} + 1$]. — Verf. gibt hinreichende Bedingungen dafür, daß das Problem überhaupt nach dem Veblenschen Verfahren lösbar ist; es werden 4 gleichwertige Probleme gestellt, von denen das dritte lautet: jeder Zahl $\omega^\alpha < \omega_1$ eine Normalfunktion erster Klasse zuzuordnen, so daß deren kleinster Fixpunkt eben die Zahl ω^α ist. — Definitionen. Jede eindeutige, streng aufsteigende stetige Abbildung φ der Menge aller Ordinalzahlen $1 \leq \xi < \omega_k$ auf sich selbst wird Normalfunktion k -ter Klasse genannt; mit $V\varphi$ wird die Wertmenge von φ bezeichnet. φ' (die Derivierte von φ) ist diejenige Normalfunktion, deren Wertmenge mit der Menge aller Fixpunkte von φ übereinstimmt. Wenn zu einer Limeszahl η eine eindeutige Limeszahl $\tau_\eta < \eta$ und eine

eindeutige wachsende τ_η -Folge η_ξ von Zahlen $< \eta$ mit η als Limes gegeben ist, so schreibt Verf.
 $\eta \Rightarrow \lim_{\xi < \tau_\eta} \eta_\xi$.
Georg Kurepa.

Fodor, G.: On two problems concerning the theory of binary relations. Publ. math., Debrecen 1, 199—200 (1950).

Siano assegnate: una funzione $f(x)$ nell'intervallo chiuso $(0, 1)$, positiva e ≤ 1 , e una legge che ad ogni x di $(0, 1)$ fa corrispondere un insieme S_x di numeri reali, tale che $\text{extr. inf. } \{ \{y - x\} \} \geq f(x)$ per $y \in S_x$. Due punti $x' \in (0, 1)$, $x'' \in (0, 1)$ sono chiamati „indipendenti“ fra loro, se x' non $\in S_{x''}$, ed x'' non $\in S_{x'}$. — L'A. dimostra che, se $f(x)$ è misurabile, esiste in $(0, 1)$ un insieme E_1 , tale che $\text{mis } E_1 > 0$ e che due punti qualunque x', x'' di E_1 sono fra loro indipendenti; esiste anche in $(0, 1)$ un insieme E_2 avente la potenza del continuo, tale che due punti qualunque x', x'' di E_2 sono fra loro indipendenti.
Tullio Viola.

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

Bibliographie. (Theorie der Mengen und Funktionen.) Matematika v SSSR 1917—1947, 415—478 (1948) [Russisch].

Die Gesamtdarstellung der Mathematik in Rußland von 1917—1947 faßt die Bibliographie zu den eng ineinander verflochtenen Artikeln zusammen, die über deskriptive Mengenlehre, Metrische Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, Approximation von reellen Funktionen durch Polynome, Funktionen einer komplexen Veränderlichen der Sache nach getrennt dargestellt sind (vgl. dies. Zbl. 41, 20, 28, 36 und folg. Referat). Die genauen Literaturangaben be treffen über 1850, darunter sehr viele bedeutende, Arbeiten und dürfen darum auch als besonders wertvoll gelten, weil sie zum erstenmal für einen großen Teil der Welt auf die kaum oder gar nicht erreichbaren russischen Arbeiten aus den Kriegsjahren (I und II) und der ersten Folgezeit hinweisen. Für viele russische Mathematiker geben sie eine — praktisch — lückenlose Liste der Veröffentlichungen. Das über tausend Seiten starke, vorzüglich ausgestattete Werk entspricht in der Anlage der Enzyklopädie bzw. dem Mémorial sci. math., unter Einhaltung von örtlichen und zeitlichen Grenzen. Da aber die russischen Mathematikerschulen in vielen Punkten sehr geschlossen gearbeitet haben und der 1. Weltkrieg an sich einen wesentlichen Einschnitt bedeutet hat, so sind diese Grenzen hier weniger fühlbar, als sie etwa den Mitarbeitern der Fiat Reviews (Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939—1946) vor Augen geführt worden sind. Man darf hoffen, daß das Werk ermöglicht, Bibliographien und Referatenwesen nunmehr lückenlos anzuschließen. Es wäre dringend erwünscht, zu erfahren, wo und wie die wichtigen russischen Arbeiten der Kriegsjahre außerhalb der Oststaaten zugänglich sind. Für Deutschland jedenfalls herrscht von 1941—1946 ein absolutes Vakuum, während die Literatur 1947—48 nur inselhaft vertreten ist. Das muß jeder bedauern, den seine Arbeit immer wieder auf russische Publikationen angewiesen sein läßt.
Egon Ulrich.

Bari, N. K., A. A. Ljapunov, D. E. Meňšov und G. P. Tolstov: Metrische Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Matematika v SSSR 1917—1947, 256—287 (1948) [Russisch].

Der vorliegende Teil des Gesamtwerks [für die Anlage und die Bibliographie vgl. vorsteh. Referat] ist in 5 Paragraphen gegliedert. § 1. Meßbare Funktionen, Integration, Differentiation. § 2. Summierung Divigenter Reihen. § 3. Trigonometrische Reihen. § 4. Orthogonalsysteme und -entwicklungen. § 5. Fastperiodische Funktionen. Auch hier (wie bei der Mengenlehre) wird N. N. Lusin als Schöpfer der Schule gezeichnet. Seine Doktorarbeit „Integral und trigonometrische Reihe“ (1951 zusammen mit anderen Arbeiten neu herausgegeben) war Quelle vieler Untersuchungen; wenn er sich auch vor allem mit beschreibender Funktionentheorie beschäftigt hat, so übte er doch großen Einfluß auf die Entwicklung der metrischen Funktionentheorie (metr. Fth.) durch Arbeiten, Anregung und Schüler: P. S. Alexandroff und Suslin, Chinč'in und Meňšov (trigonometrische Reihe, die fast überall gegen 0 konvergiert), Lusin und Privalov, später Lavrentiev und Keldyš (Metr. Fth. und Randwertprobleme). Auch die metrische Zahlentheorie (Chinč'in, Šnirelman), und die Wahrscheinlichkeitslehre mit ihren Anwendungsgebieten (Chinč'in, Kolmogorov) seien von hier aus tief beeindruckt. Für die 20-er Jahre wird die Leningrader Schule (Fichtengol'c,

Gjunther) hervorgehoben, ferner die Arbeiten von A. D. Aleksandrov, die Anwendungen der metr. Fth. auf viele Gebiete der Geometrie geben. Eigenwerttheorie, Funktionenräume, Funktionalanalysis gestatten Anwendungen der Ideen der metr. Fth., die von Lavrentiev, Lusternik, Bogoljubov, Stepanov, Sobolev u. a. entwickelt sind. — Nach einer interessanten Auseinandersetzung, die Einblick in den Zusammenhang der Entwicklung und der Schulen vermittelt, folgt ein eingehender Literaturbericht in sachlicher Ordnung.

Egon Ullrich.

● **Lebesgue, Henri:** *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* — 2. éd. Paris: Gauthier-Villars 1950. XIII, 342 p., avec figs. 2000 fr.

● **La Vallée Poussin, Ch. de:** *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble. Classes de Baire.* — 2. éd. Nouveau tirage. Paris: Gauthier-Villars 1950. XII, 194 p. 900 fr.

Iseki, Kiyoshi: A construction of two-valued measure on Boolean algebra. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part. I 2, 43—45 (1950).

The paper contains a simple proof of the existence of a two-valued measure on a Boolean algebra. The proof is based on the following lemma: Let L be a distributive lattice, and let a set $A = \{a_\alpha\} \subset L$ have finite intersection property. If $a_\alpha = b'_\alpha \cup b''_\alpha$, there is a function $\beta(\alpha) = ' \text{ or } ''$ such that the set $\{b_\alpha^{\beta(\alpha)}\}$ has finite intersection property.

Roman Sikorski.

Tolstov, G. P.: Über das Kurven- und das Doppelintegral. Trudy mat. Inst. Steklov 35, 103 S. (1950) [Russisch].

Die Studie stellt sich die Aufgabe, die im Titel genannten Begriffe und andere damit im Zusammenhang stehende Fragen unter einem allgemeineren Gesichtspunkt zu betrachten, als ihn die Lebesguesche Theorie darstellt — deren Kenntnis übrigens vorausgesetzt wird — und ersetzt demgemäß das L -Integral durch das Denjoy-Čhinc'in-Integral (D -Integral). Den Großteil der Ergebnisse hat Verf. schon in einer Reihe von Arbeiten bewiesen oder angekündigt, worauf bei einer kurzen Kapitelübersicht soweit als möglich hingewiesen werden wird. (Unter Integral wird im folgenden immer das D -Integral verstanden.) — I. Substitution neuer Veränderlicher in einem Integral über eine Veränderliche (vgl. dies. Zbl 39, 287). II. Betrachtung des Kurvenintegrals. Insbesondere handelt es sich um die Bestimmung einer Funktion zweier Veränderlicher aus ihrem Differential längs einer streckbaren, einfachen Kurve. III. Bedingungen dafür, daß ein Differentialausdruck das vollständige Differential einer Funktion zweier Veränderlicher ist und für die Analytizität komplexer Funktionen bei Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Hierfür kann verwiesen werden auf Verf., dies. Zbl. 25, 37, Mat. Sbornik, n. Ser. 10, 79—85 (1942) und dies. Zbl. 32, 343. IV. $f(x, y)$ sei in einem

Rechteck definiert und vertauscht integrierbar, d. h. $\int_{x_0}^x dx \int_{y_0}^y f dy = \int_{y_0}^y dy \int_{x_0}^x f dx = J(x, y)$.

(Die Integrale sind natürlich D -Integrale.) Die Eigenschaften von $J(x, y)$ werden ausführlich untersucht (dies. Zbl. 32, 342). Man beachte noch, daß der Satz von Fubini für Denjoyintegrale nicht gilt (s. dies. Zbl. 37, 39). Insbesondere möge auf die Konstruktion eines Beispiels verwiesen werden, wonach $J(x, y)$ in einem Quadrat fast überall unstetig sein kann. V. In IV. wurde bewiesen: Existiert $F(x, y)$, so daß $\partial^2 F / \partial x \partial y = \partial^2 F / \partial y \partial x = f(x, y)$, dann ist $f(x, y)$ vertauscht integrierbar. Jetzt wird gezeigt: Es gibt Beispiele für nichtsummierbares $f(x, y)$ unter Benutzung einer Konstruktion von Bogomolowa, Mat. Sbornik, n. Ser. 32, 152—171 (1925). VI. Hinreichende Bedingungen für vertauschte Integrierbarkeit in einem Rechteck. Verallgemeinerung des Satzes von Morera. VII. und VIII. Hinreichende Bedingungen für vertauschte Integrierbarkeit in krummlinig begrenzten Bereichen. Hierfür kann angeführt werden: dies. Zbl. 32, 342, 34, 181, und auch 38, 40. Die Ausführungen sind klar geschrieben. — S. 48 A. Z. v. u. fehlt nach B. R.

Leo Schmetterer.

Džvaršejšvili, A. G.: Über die Darstellung einer im Denjoy-Perronschen Sinne summierbaren Funktion durch singuläre Integrale. Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR 11, 473—478 (1950) [Russisch].

The following theorem is proved: Let $\Phi_n(t, x)$ be a sequence of positive functions defined in the square $a < x < b$, $a \leq t \leq b$, such that (1) for each fixed x_0 , the function $\Phi_n(t, x_0)$ of the one variable t is non-decreasing in the interval (a, x_0) , and it is non-increasing in the interval (x_0, b) ; (2) if $a \leq \alpha < x < \beta \leq b$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \Phi_n(t, x) dt = 1$; (3) there is a function $k(x)$

such that $\int_a^b \Phi_n(t, x) dt \leq k(x)$ for $n = 1, 2, \dots$. If f is a function integrable in the sense of

Perron-Denjoy, then $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \Phi_n(t, x) dt = f(x)$ for every point x such that $f(x)$ is the derivative of the integral of f . — It is easy to see that the condition (3) is superfluous. — This theorem was earlier proved by Romanovski for functions integrable in the sense of Lebesgue. The proof in the reviewed paper is indeed the same as the proof of Romanovski's theorem in Natanson's book *The theory of functions of a real variable*, pp. 242—245 (Moskva 1950; see this Zbl. **39**, 282). Only the proof of the lemma (Theorem 2) that, under some assumption on φ_n ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt = 0$ for every function f integrable in the sense of Perron-Denjoy, must be modified. Notice that the formulation of Theorem 2 in the reviewed paper is trivially false, but it can be easily corrected. Roman Sikorski.

Sunouchi, Gen-ichirô and Masatomo Utagawa: The generalized Perron integrals. Tôhoku math. J., II. Ser. **1**, 95—99 (1949).

Verf. bemerkt, daß bei den Burkill'schen Erweiterungen des Perronschen Integralbegriffs von den Unter- und Oberfunktionen Stetigkeit verlangt wird (nur approximate continuity, Ref.) und zeigt, daß man darauf verzichten kann, wodurch die Definition sich vereinfacht, der Integralbegriff aber nicht ausgedehnt wird.

Oskar Perron.

Motchane, Léon: Sur les critères de conservation de classe et les familles de fonctions fermées au sens de la convergence simple. C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 1206—1208 (1950).

Sia $f(x)$ una funzione misurabile (sec. Borel) nell'intervallo $(0, 1)$, inoltre siano: P un insieme perfetto qualunque contenuto in $(0, 1)$, E_P l'insieme formato da tutti i punti di P , nei quali $f(x)$ è continua rispetto a P . L'A. chiama $f(x)$ quasi-continua su P se, qualunque sia il punto $x_0 \in P$, il

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E_P} |f(x) - f(x_0)|$$

è nullo. L'A. mette in relazione tale definizione con la classificazione di Baire ed enuncia, tra le altre, alcune proposizioni che danno condizioni d'appartenenza alla prima classe, per le funzioni limiti di certe successioni convergenti di funzioni misurabili.

Tullio Viola.

Borwein, D.: A summability factor theorem. J. London math. Soc. **25**, 302—315 (1950).

Viene invertito un teorema di G. H. Hardy [Messenger of Math. **40**, 87—91, 108—112 (1911)] e J. Cossar (questo Zbl. **28**, 393), che fornisce condizioni sufficienti per l'esistenza di certi integrali impropri, le cui funzioni integrande s'esprimono come prodotti di funzioni assegnate. La ricerca implica l'indagine di proprietà profonde degli integrali impropri, che offrono analogie con note proprietà delle serie.

Tullio Viola.

Gál, István Sándor et Jurjen Ferdinand Koksma: Sur l'ordre de grandeur des fonctions sommables. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 1321—1323 (1948).

Gál, István Sándor: Sur l'ordre de grandeur des fonctions sommables. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 636—638 (1949).

Gál, I. S. et J. F. Koksma: Sur l'ordre de grandeur des fonctions sommables. Nederl. Akad. Wet., Proc. **83**, 638—653; Indagationes math. **12**, 192—207 (1950).

Gehören die Funktionen $F_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) im Intervalle $(0, 1)$ zur Klasse L^p und ist $\varphi(n)$ eine nicht abnehmende Folge mit $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)^{-1} < \infty$, so folgt

aus (1) $\int_0^1 |F_n(x)|^p dx = O(\Phi(n))$ bekanntlich (2) $F_n(x) = o(\Phi(n) \varphi(n))^{1/p}$ für fast jedes x (d. h. für alle x mit Ausnahme höchstens einer Nullmenge). Dieser leicht beweisbare Satz läßt sich bekanntlich nicht verschärfen; läßt man nämlich die Beschränkung $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)^{-1} < \infty$ fallen, dann kann man Funktionenfolgen angeben,

für welche (1) gilt, aber die Relation (2) für kein x ihre Gültigkeit behält. Verff.

werfen die Frage auf, unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen für $\int_0^1 |F_n(x)|^p dx$

eine schärfere Ungleichung als (2) gefolgert werden kann? Es wird folgendes Theorem bewiesen: Es sei $F(M, N; x)$ eine Funktion, für welche $F(M, N; x) \leq F(M, N'; x) + F(M + N', N - N'; x)$ für jedes natürliche M und für jedes natürliche $N, N', N \geq N'$, gilt. Dann folgt aus den Voraussetzungen a) Es ist für $M = 0$ und für jedes $N = 2^n$ (n natürliche Zahl) und für jedes Paar M, N nicht-

negativer ganzer Zahlen mit $M \geq 1, 0 \leq N \leq M - 1$: $\int_0^1 |F(M, N; x)|^{1/p} dx = O(\Phi(M, N))$. b) Es sei $\kappa(n, \lambda) \geq 1$ ($n = 1, 2, \dots; \lambda = 1, 2, \dots$) und $\varphi(N)$ eine nicht-abnehmende, positive Funktion mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\Phi(0, 2^n)) + \sum_{\lambda=1}^n \kappa(n, \lambda)^p \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^n - \lambda - 1} \Phi(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{2^n - 1}) \varphi(2^n)^{-1} < \infty,$$

$$c) \quad K(N) = \begin{cases} 1 & \text{für } p = 1 \\ \max_{2^v \leq N} \left(1 + \sum_{\lambda=1}^v \kappa(v, \lambda)^{-p/(p-1)} \right)^{p-1} & \text{für } p > 1 \end{cases}$$

die Relation $F(0, N; x) = o(K(N) \varphi(N))^{1/p}$ für fast jedes x . — Aus diesem Satze werden weitere Resultate abgeleitet, die einige frühere Resultate der Verff. und anderer enthalten. Wegen der Einzelheiten muß auf die Arbeit verwiesen werden.

P. Szűsz.

Nagumo, Mitio: Über die Unabhängigkeit stetiger Funktionen. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part I 2, 89—90 (1950) [Esperanto].

Die $f_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, seien in einer Teilmenge D eines metrischen Raumes reellwertige stetige Funktionen und mögen eine Abbildung f in den R_m vermitteln. Die f_i heißen abhängig auf D , wenn $f(D)$ von der ersten Kategorie im R_m ist, andernfalls unabhängig. Verff. führt weiter den Begriff der Abhängigkeit der f_i in einem Punkte p ein [natürlich so: Es existiert eine Umgebung von p , deren Bild vermöge f von der ersten Kategorie ist] und gibt einige einfache Folgerungen an. Schließlich wird der Satz bewiesen: D sei lokal kompakt in einem separablen, metrischen Raum und die $f_i(x)$ unabhängig auf D . D_0 sei die Gesamtheit der Punkte aus D , in denen die $f_i(x)$ unabhängig sind. Dann ist die Menge der Punkte aus D_0 , in denen f nicht umgebungstreu ist, von der 1. Kategorie in D_0 .

Leo Schmetterer.

Popoviciu, Tiberiu: Sur les fonctions d'une variable réelle dont l'ensemble de définition est la réunion de deux sous-ensembles de monotonie opposée. An. Acad. Republ. Popul. Române, Ser. Mat. Fiz. Chim. 3, 1—14, russische und französ. Zusammenfassgn. 15, 16 (1950) [Rumänisch].

L'A. donne d'abord une nouvelle démonstration de la propriété suivante: La condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse décomposer l'ensemble de définition E de la fonction $f(x)$, réelle, uniforme, de la variable réelle x , en deux sous-ensembles consécutifs, sur chacun la fonction étant monotone et la monotonie étant de sens opposé sur les deux sous-ensembles, est que la propriété soit vraie sur tout groupe de 3 points de E . — Ensuite on examine le même problème en levant la restriction que les sousensembles en question soient consécutifs. Dans ce cas, une fonction définie sur 4 points peut ne pas jouir de la propriété étudiée. Mais on démontre la propriété suivante: La condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble de définition E (ayant au moins 5 points) de $f(x)$, soit la réunion de deux sous-ensembles, sur chacun la fonction étant monotone et de monotonie opposée sur les deux sous-ensembles, est que la propriété soit vraie sur tout groupe de 5 points de E . Autoreferat.

Minetti, Silvio: Sull'operazione di derivazione. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 8, 27—31 (1950).

L'A. definisce la „derivata oscillatoria“ di $f(x)$, in un punto x_0 e da una parte di x_0 , per es. verso destra [supposto che x_0 sia d'accumulazione, verso destra,

dell'insieme I di definizione di $f(x)$], ponendo $f'(x)_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{L_{x_0, x} - l_{x_0, x}}{x - x_0}$, ove $L_{x_0, x}$ ed $l_{x_0, x}$ sono rispettivamente l'estremo superiore e quello inferiore di $f(x)$ nell'insieme dei punti di I , che sono contenuti nell'intervallo aperto $[x_0, x]$. L'A. enuncia alcune proprietà della derivata $f'(x)$, illustrandole con due opportuni esempi.

Tullio Viola.

Schmidt, Robert: Zusammenhänge zwischen Differenzenquotienten und Derivierten von stetigen Funktionen. J. reine angew. Math. 188, 112—114 (1950).

Let $f(x)$ be real and continuous in an interval containing x_0 , $D(f; x)$ a general derivative and $[x x_0](f)$ the differential quotient. Set $F(x, \rho) \equiv \rho D(f; x) + (1 - \rho)[x x_0](f)$, $0 \leq \rho \leq 1$. Then, as $x \rightarrow x_0$, $\lim F(x, \rho) \leq \lim F(x, 0) \leq \lim F(x, 0) \leq \lim F(x, \rho)$.

Bo Kjellberg.

Trjitzinsky, W. J.: Mixed Laplacians and potential representations. Ann. Mat. pura appl., Ser. III 31, 143—230 (1950).

L'équation $\Delta F(x, y) = f(x, y)$, où f est donnée, est, dans le plan, l'analogue de $F''(x) = f(x)$; quand F'' désigne non la dérivée seconde ordinaire, mais la dérivée seconde mixte au sens de A. Denjoy (Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique I—IV, Paris 1941—49, ce Zbl. 36, 319), la résolution de cette dernière équation nécessite des méthodes de totalisation. Or on peut définir pour $F(x, y)$ divers laplaciens mixtes; pour chacun d'eux la résolution de $\Delta F = f$ posera un problème de totalisation. Le présent mémoire est un travail préparatoire à l'étude de telles totalisations; c'est en cela que réside son principal intérêt. — Dans une première partie (p. 147—176) sont introduits divers laplaciens (mixte, généralisé, spécial, différentiel) et leurs relations mutuelles sont étudiées. Exemple de définition: le laplacien mixte supérieur est $\bar{\nabla} F(x, y) = \limsup \omega(h, k, h', k')$ ($h, k, h', k' > 0$ et tendant vers 0) avec:

$$\omega = \frac{2}{h+k} \left[\frac{F(x+h, y) - F(x, y)}{h} - \frac{F(x, y) - F(x-k, y)}{k} \right] + \frac{2}{h'+k'} \left[\frac{F(x, y+h') - F(x, y)}{h'} - \frac{F(x, y) - F(x, y-k')}{k'} \right].$$

Exemple de théorème: si $-\infty < \bar{\nabla} F \leq \bar{\nabla} F < +\infty$, alors $\partial F/\partial x$ et $\partial F/\partial y$ existent et sont finies. — La seconde partie contient des énoncés plus substantiels concernant la représentation des fonctions $F(x, y)$ par des potentiels. Exemple (p. 179): si $\partial F/\partial x$ et $\partial F/\partial y$ existent et sont continues dans un domaine ω et si la fonction d'intervalle $\Phi(I) = \int_{(I)} \text{grad } F \cdot \vec{n} ds$ [où (I) est le contour du rectangle I] est absolument continue, on peut associer à F la dérivée $f(x, y)$ de Φ , qui existe presque partout; moyennant deux autres conditions sur f , on a:

$$F(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int \int_{\omega} \log \frac{1}{r} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = h(x, y) \quad (h \text{ harmonique}).$$

On montre d'ailleurs (p. 194) que tous les laplaciens (sauf le mixte) du potentiel F d'une fonction $f(x, y)$ mesurable et bornée sont égaux à f en tout point de continuité approximative de f . Pour f mesurable non bornée, c'est encore vrai en tout point de „quasi-continuité“ de f [la condition de quasi-continuité, plus forte que celle de continuité approximative, équivaut à dire qu'au point (x, y) envisagé la croissance de f est en moyenne inférieure à celle d'une certaine fonction; l'auteur ne se pose pas la question de l'existence de tels points; en fait il existe des fonctions n'admettant aucun point de quasi-continuité]. — Un paragraphe est consacré à l'étude de conditions suffisantes d'harmonicité d'une fonction F . Par exemple: si $\partial F/\partial x$ et $\partial F/\partial y$ sont continues, F est harmonique si 1°) la dérivée inférieure de Φ (voir définition ci-dessus) est nulle presque partout; 2°) la dérivée supérieure de Φ est partout finie sauf peut-être sur une suite de segments parallèles aux axes. Les résultats de ce paragraphe trouvent leur application dans l'étude de la représentation potentielle des fonctions F à dérivées continues, dont la fonction Φ associée a ses nombres dérivés partout finis, sauf sur une suite de segments parallèles aux axes. — D'assez nombreuses erreurs typographiques rendent parfois la lecture malaisée.

Gustave Choquet.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

• **Steffensen, J. F.: Interpolation.** — 2nd. ed. New York: Chelsea Co. 1950. IX, 248 p. \$ 3,50.

• **Klein, George: A note on interpolation.** Proc. Amer. math. Soc. 1, 695—702 (1950).

Es sei $f(x)$ eine Funktion mit der Periode 2π und $I_n(x; f)$ ihr trigonometrisches Schaltpolynom n -ter Ordnung, das mit f an den Stellen $x_k = x_0 + k h$, $k = 0, 1, \dots, 2n$; $h = h_n = 2\pi/(2n+1)$ übereinstimmt. Es bestimmt sich nach Lagrange durch

$$(1) \quad I_n(x; f) = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) d\omega_{2n+1}(t), \quad \text{wo} \quad D_n(u) = 2^{-1} \sum_{v=-n}^n e^{i v u}$$

Dirichlets Kern und $\omega_{2n+1}(t)$ eine Stufenfunktion ist, die, zwischen zwei aufeinander folgenden Schaltstellen fest, an diesen um den Betrag h springt. Bekanntlich braucht $I_n(x; f)$ selbst dann nicht gegen f zu streben, wenn f überall stetig ist. Diesen Befund verbessert Verf. wie folgt: f sei eine beschränkte meßbare Funktion, an der Stelle x' mit einer Ableitung der Ordnung $j < p$ versehen, wo p eine natürliche Zahl; $f^{(j)}$ ist im verallgemeinerten Sinne nach Peano und de la Vallée-Poussin zu verstehen. Es sei $T_{n,p}$ das trigonometrische Polynom n -ter Ordnung, das an den Stellen x_k , deren erste x_0 von n abhängen kann, die Werte

$$f_k = 2^{-p} \sum_{i=0}^p C_{p,i} f[x_k + (i - (p-1)/2) h] \quad \text{mit} \quad C_{p,i} = p!/[i! (p-i)!]$$

annimmt. Behauptet wird, daß (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (d^j/dx^j) T_{n,p} = f^{(j)}(x')$. Der Beweis zerfällt in zwei Teile. Im ersten, gestaltlichen gewinnt Verf. für $T_{n,p}$ zunächst mittels (1) den Ausdruck

$$T_{n,p}(x; f) = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} f(t) D_{n,p}(x-t) d\omega_{2n+1}(t), \quad \text{wo} \quad D_{n,p}(u) = 1/2 + \sum_{v=1}^n \cos v u \cos^p(v h/2),$$

und schreitet von ihm mit den auf irgendeine Zahlenfolge $\{a_v\}$ bezüglichen Zeichen $\Delta a_v = a_v - a_{v+1}$, $\Delta^s a_v = \Delta(\Delta^{s-1} a_v)$ durch geeignete Teilsummierungen zu

$$T_{n,p}(x; f) = \sum_{v=0}^{n-1} I_{n,v}(x; f) \Delta \cos^p(v h/2) + I_n(x; f) \cos^p(n h/2)$$

fort, wo $I_{n,v}$ die v -te Teilsumme von (1) ist. Die in (2) links auftretende Ableitung stellt sich in der Form dar

$$(3) \quad (d^j/dx^j) T_{n,p}(x'; f) = \sum_{v=0}^{n-p-1} (d^j/dx^j) I_{n,v}^p(x'; f) C_{n+p,v} \Delta^{p+1} \cos^v(v h/2) \\ + \sum_{k=0}^p (d^j/dx^j) I_{n,n-p+k}^{p-k}(x'; f) C_{n,n-p+k} \Delta^{p-k} \cos^p[(n-p+k) h/2],$$

wo $I_{n,v}^l$ [wie später K_v^l] das l -te Cesàrosche Mittel der Folge $I_{n,v}[D_n]$ bei festem n bedeutet. Aus (3) geht hervor, daß (2) zutrifft, wenn f ein trigonometrisches Polynom ist. Wählt man dieses geeignet und zieht es von f ab, so kann man (2) die besondere Gestalt (2*) geben, in der rechts 0 statt $f^{(j)}(x')$ erscheint. Auf (2*) bezieht sich der zweite Teil des Beweises, die Grenzbetrachtung. Sie besteht im Nachweis der Beziehungen

$$(4) \quad (d^j/dx^j) I_{n,v}^p(x'; f) \rightarrow 0 \quad \text{mit} \quad v \rightarrow \infty, v \leq n \quad \text{für} \quad j = 0, 1, \dots, p-1.$$

Verf. benützt dabei gewisse von A. Zygmund (Trigonometrical series, p. 259, Warszawa 1934; dies. Zbl. 11, 17) herrührende Abschätzungen der Ableitungen der K_v^p , die die Ungleichungen

$$(5) \quad |t|^j |(d^j/dt^j) K_v^p(t)| \leq C v^{-1} t^{-2} \quad \text{für} \quad v^{-1} \leq |t| \leq \pi$$

mit festem C liefern. Indem er das Integral

$$\pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon_t |t|^j |(d^j/dt^j) K_v^p(t)| d\omega_{n+1}(x' + t) \geq |(d^j/dx^j) I_{n,v}^p(x'; f)|,$$

in dem $\varepsilon_t \geq 0$ und $\varepsilon_t \rightarrow 0$ mit $t \rightarrow 0$, in zwei Bestandteile zerlegt, die sich über $(-v^{-1}, v^{-1})$ und das diesen Spielraum zu $(-\pi, \pi)$ ergänzende Gebiet erstrecken, und in den Integranden den Malteil ε_t jeweils beiseite läßt, zeigt er, daß die beiden

so veränderten Integrale unter einer festen Schranke bleiben. Daraus schließt er auf (2*), woraus dann (2) folgt. *Lothar Koschmieder.*

Morozov, M. I.: Annäherung von Funktionen, die einer Lipschitzbedingung genügen, durch Interpolationspolynome mit doppelten Interpolationsknoten. Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 4 (38), 156—161 (1950) [Russisch].

At the abscissae of interpolation the interpolatory polynomials are to agree with the given function $f(x)$ and are to have zero derivative. There are two cases (i) interpolation by trigonometric polynomials with regularly spaced abscissae, with $f(x)$ of period 2π and subject to $|f(x') - f(x'')| \leq |x' - x''|^\alpha$, with $0 < \alpha \leq 1$, (ii) ordinary polynomials with abscissae at the zeros of a Čebyšev polynomial, with $f(x)$ defined in $(-1, 1)$ and subject to $|f(x') - f(x'')| \leq |x' - x''|^\alpha$. If in case (i) $C_n^{(\alpha)}$ denotes the maximum possible discrepancy for n abscissae and functions of the given class, he proves that $C_n^{(\alpha)} = C^{(\alpha)} \cdot n^{-\alpha} + o(n^{-\alpha})$ for $0 < \alpha < 1$, where $C^{(\alpha)}$ is a specified constant, while for $\alpha = 1$, $C_n^{(\alpha)} = (4 \log n)/(\pi n) + O(n^{-1})$. In the case (ii) the last result appears to hold for odd n , and to hold as an upper bound for even n . *Frederick V. Atkinson.*

Berman, D. L.: Über einen Interpolationsprozeß. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 61, 5—8 (1948) [Russisch].

Désignons par $x_i^{(n)}$, $1 \leq i \leq n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, des nombres tels que $-1 \leq x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} \leq 1$, et soit $f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle $[-1, 1]$. Formons l'expression

$$N_n(f, x) = \sum_{k=1}^n l_k^{(n)}(x) \frac{2 \sin(2h+1) \arcsin \frac{1}{2}(x - x_k^{(n)})}{(2h+1)(x - x_k^{(n)})} f(x_k^{(n)})$$

$$\text{où } l_k^{(n)}(x) = \omega_n(x) / [(x - x_k^{(n)}) \omega_n'(x_k^{(n)})],$$

$k = 1, 2, \dots, n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $\omega_n(x) = (x - x_1^{(n)})(x - x_2^{(n)}) \dots (x - x_n^{(n)})$ et h est une fonction numérique de n , qui satisfait à la condition $0 < \delta_1 < 2h/n < \delta_2 < 1$, où δ_1 et δ_2 sont deux nombres arbitrairement petits. En généralisant un résultat de S. Bernstein l'A. démontre le théorème suivant: Supposons que pour chaque intervalle $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 1$, il existe un nombre fini c , dépendant seulement de ε , tel que $\sum_{k=1}^n [l_k^{(n)}(x)]^2 < c$, $x \in [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Alors on a uniformément $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(f, x) = f(x)$ dans l'intervalle $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$. *Nikola Obrechhoff.*

Nikol'skij, S. M.: Approximation von Funktionen einer reellen Veränderlichen durch Polynome. Matematika v SSSR 1917—1947, 288—318 (1948) [Russisch].

Dieser Bericht, als zweiter Abschnitt der reellen Funktionentheorie, gliedert sich wie folgt: § 1. Grundlegende Literatur und Monographien von S. N. Bernštejn. § 2. Polynomfolgen (Bernštejn u. a.; Berührung mit Lagrangescher Interpolation, Féjer, Wahl geeigneter Knoten, Rogosinskis Abschnittskopplungen und Verwandtes). § 3. Abschätzungen zur Güte der Näherung bei verschiedenen Funktionenklassen. § 4. Annäherung auf der unbegrenzten reellen Achse. § 5. Bernštejnsche Ungleichungen (und ihre Fortführungen). § 6. Polynome, die die 0 am besten annähern (Arbeiten von Achiezer, Bernštejn, Geronimus, Remez u. a.). § 7. Orthogonale Polynome (neben Sätzen aus Bernsteins Buch vor allem Arbeiten von Geronimus). § 8. Andre Näherungsverfahren: $\Psi_n = \sum_0^n \alpha_\nu \psi_\nu(x)$ wird auf

ein System stetiger Funktionen $\psi_n(x)$ gestützt, von dem allein vorausgesetzt wird: Jedes $\Psi_n(x)$, das auf einem festen Intervall $n+1$ Nullstellen hat, verschwindet identisch. § 9. Quadraturformeln (Bernštejn, Achiezer, Krejn, Geronimus u. a.). § 10. Theorie der Momente. § 11. Zwei Monographien von Gončarov und Achiezer. — Die Bibliographie ist mit Nachbarabschnitten zusammengefaßt (vgl. dies. Zbl. 41, 22). *Egon Ullrich.*

Olds, C. D.: The best polynomial approximation of functions. Amer. math. Monthly 57, 617—621 (1950).

Breve articolo a carattere divulgativo sull'argomento indicato nel titolo.

Carlo Miranda.

Makar, Ragy H.: Induced infinite matrices and induced basic sets of polynomials. Proc. math. phys. Soc. Egypt 4, 61—69 (1949).

Verf. erklärt zuerst die zu einer unendlichen Matrix $P = (p_{ij})$ gehörende r -te induzierte Matrix $P^{(r)}$; ihre Elemente sind die aus r Zeilen und r Spalten von P gebildeten „Permanenten“ (diese stimmen formal mit den Determinanten überein, doch sind alle Glieder positiv zu nehmen), genommen in einer gewissen Anordnung. Faßt man P als assoziierte Matrix einer Polynombasis $\{p_n(z)\}$ auf (zur Terminologie vgl. Whittaker, Sur les séries de base de polynomes quelconques, Paris 1949; dies. Zbl. 38, 228), so entspricht der Matrix $P^{(r)}$ die r -te induzierte Basis $\{p_n(z)\}^{(r)}$. Verf. beweist nun: Ist $\{p_n(z)\}$ eine einfache Basis und in einem gewissen nicht verschwindenden Kreis effektiv, so sind alle induzierten Basen in einem Kreis mit einem Radius $R > 1$ effektiv.

Wolfgang Hahn.

Leont'ev, A. F.: Über eine Folge von Polynomen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 72, 621—624 (1950) [Russisch].

Let $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ and let $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$. Then in order that the function-system $\{x^{\lambda_n}\}$ should be complete in the class of functions continuous in $(0, 1)$ it is known to be necessary and sufficient that $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty$. The author considers the case $\sum \lambda_n^{-1} < \infty$, so that the approximable functions must be of a more special kind. Theorem 1 states that if the polynomial sequence $P_n(x) = \sum_{j=1}^r a_{nj} x^{\lambda_j}$ ($n = 1, 2, \dots$) converges uniformly over $(0, 1)$, then it also converges in the region $0 < |x| < 1$, $-\infty < \arg x < \infty$, and uniformly in any bounded closed set in this region, the limit function being analytic. Theorem 2 gives more precise results on the domains of analyticity and convergence, stating inter alia that $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nj}$ exists.

Frederick V. Atkinson.

Gagua, M. E.: Über die Approximation stetiger Funktionen durch spezielle Lösungen elliptischer Differentialgleichungen. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 11, 211—214 (1950) [Russisch].

I. N. Vekua (Neue Methoden zur Lösung elliptischer Gleichungen, Moskva-Leningrad 1948; Chapter II; dies. Zbl. 41, 62) has given expansion theorems for solutions of

$$\Delta u + a(x, y) \partial u / \partial x + b(x, y) \partial u / \partial y + c(x, y) u = 0$$

in terms of two sets of standard solutions, analogous to the theorems of Taylor and Laurent in complex variable theory. Here Δ denotes the Laplace operator, and $a(x, y)$, $b(x, y)$ and $c(x, y)$ are integral functions of the real variables x, y with in general complex values. The standard solutions are of two types (i) $h_k(x, y, x_0, y_0)$ ($k = 0, 1, \dots$), regular everywhere, and (ii) $w_k(x, y, x_0, y_0)$ ($k = 0, 1, \dots$) regular everywhere except at (x_0, y_0) , these being respectively analogous to $(z - z_0)^k$ ($k = 0, 1, \dots$) and $(z - z_0)^k$ ($k = -1, -2, \dots$) in complex variable theory. The present author considers uniform approximation to arbitrary continuous functions on a bounded closed set E , which is roughly speaking of zero measure. According to Theorem 1, if there is a sequence of simply-connected regions T_n ($n = 1, 2, \dots$) such that mes $T_n = 1/n$, $E \subset T_n$, then uniform approximation is possible by means of finite linear combinations of the h_k . If however the T_n are multiply-connected, then by Theorem 2 the approximation may involve the w_k as well. His Theorem 3 relates to the extension of an expansion of Vekua's type from the interior of a region on the to boundary.

Frederick V. Atkinson.

Nosarzewska, Maria: On the pointwise approximation and the uniform convergence. Časopis Mat. Fys. 74, Nr. 3, 219—220 und polnische Zusammenfassg. 220 (1950).

Si dice che una successione di funzioni reali $\{f_n(p)\}$ definite in uno spazio euclideo approssima „pointwise“ una funzione $f(p)$ se, per ogni coppia di numeri ε e η si può determinare un numero N tale che per ogni $n > N$ si abbia $|f(p) - f_n(p)| < \varepsilon$, almeno per $p \in A(n)$, essendo $A(n)$ un insieme che ha almeno un punto in comune con ogni ipersfera di raggio η . Posta questa definizione l'A. enuncia senza dimostrazione alcuni teoremi di confronto tra questa nozione di convergenza e quelle di convergenza debole, di convergenza quasi uniforme e di convergenza asintotica.

Carlo Miranda.

Fine, N. J.: The generalized Walsh functions. Trans. Amer. math. Soc. 69, 66—77 (1950).

Il sistema di Rademacher $\{\Phi_n(x)\}$ è definito dalle relazioni $\Phi_0(x) = 1$ per $0 \leq x < 1/2$; $\Phi_0(x) = -1$ per $1/2 \leq x < 1$; $\Phi_0(x+1) = \Phi_0(x)$, $\Phi_n(x) = \Phi_0(2^n x)$, ($n = 1, 2, \dots$); e il sistema di Walsh $\{\Psi_n(x)\}$, ortonormale e completo in $(0, 1)$, con le relazioni: $\Psi_0(x) = 1$, $\Psi_n(x) = \Phi_{n_1}(x) \Phi_{n_2}(x) \cdots \Phi_{n_s}(x)$ per $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_s}$, $n_1 > n_2 > \cdots > n_s \geq 0$. L'A. chiama successioni di Walsh generalizzate le due successioni $\{\Psi_v(x)\}$, $\{\Psi_v^*(x)\}$ definite con le seguenti leggi: $\Psi_v(x) = \Psi_{[x]}(y) \Psi_{[y]}(x)$, $\Psi_v^*(x) = \lim_{t \rightarrow y-0} \Psi_t(x)$, e in questo lavoro l'A., impiegando

lo stesso metodo di una sua memoria precedente (questo Zbl. 36, 36) studia principalmente le analogie del sistema $\{\Psi_v(x)\}$ col sistema $\{\exp 2\pi i y x\}$. — Se $\bar{x} = \sum_{n \geq N} x_n \zeta^n$ (N intero positivo, negativo o nullo) e le x_n uguali a zero o ad uno, l'A. considera la trasformazione $\lambda(\bar{x}) = x$ dove $x = \sum_{n \geq N} x_n 2^{-n}$ e la sua inversa $\mu(x) = \bar{x}$. De-

finita l'operazione \oplus con la legge $(x \oplus y) = \lambda[\mu(x) + \mu(y)]$, l'A. dimostra che se $f(x) = \Psi_v(x)$ oppure $f(x) = \Psi_v^*(x)$, si ha $f(x \oplus x') = f(x)f(x')$ e $\Psi_v(x)\Psi_v^*(x)$ sono le uniche soluzioni non banali, misurabili, di questa equazione. — Se $y = m 2^{-n}$ con m dispari, n intero arbitrario, $\Psi_v(x)$ ha rispetto ad x il periodo 2^n ; la $\Psi_v^*(x)$

non è mai periodica in x . — Supposto $f(x) \in L$ in $(0, \infty)$, si ha $\int_0^\infty f(x \oplus a) =$

$\int_0^\infty f(x) dx$; vale il teorema di Riemann-Lebesgue $\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^\infty \Psi_v(x) f(x) dx = 0$,

e se $F(y) = \int_0^\infty \Psi_v(t) f(t) dt$ sussiste la formula di inversione di Fourier

$f(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^\omega \Psi_v(x) F(y) dy$.

Giovanni Sansone.

Gál, István Sándor: Sur les séries orthogonales $C(1)$ -sommables et $\lambda(n)$ -lacunaires. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 1140—1142 (1948).

L'A. étudie la convergence d'une série de fonctions (1) $\sum c_n \zeta_n(x)$, $C(1)$ -sommable presque partout dans l'intervalle fini (a, b) , $\{\zeta_n(x)\}$ étant un système orthonormal de fonctions définies dans (a, b) . Il précise des résultats de Alexits et Rényi (ce Zbl. 30, 301); citons en particulier: Si $\{c_n\}$ est $\lambda(n)$ -lacunaire (voir analyse précitée), et si $\sum c_n^2 \log^2(n) < \infty$, alors (1) converge presque partout dans (a, b) . Un corollaire est que (1) converge presque partout lorsque $\{c_n\}$ est $(\log n)^v$ -lacunaire ($v > 0$) et que $\sum c_n^2 (\log \log n)^2 < \infty$; dans le corollaire au théorème d'Alexits correspondant, on supposait $\{c_n\}$ $(\log \log n)^2$ -lacunaire. Sur ce théorème voir aussi Alexits (ce Zbl. 35, 39).

Armand Borel.

Sunouchi, Gen-ichirō: Notes on Fourier analysis. I. On the convergence test of Fourier series. Math. Japon. 1, 41—44 (1948).

Das Ergebnis der Arbeit steht in enger Beziehung zu Konvergenzkriterien von Hardy-Littlewood [Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., II. Ser. 3, 41—62 (1934); dies. Zbl. 8, 310, 464], F. T. Wang [Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ., I. Ser. 24, 697—700 (1936); dies. Zbl. 13, 302] und G. W. Morgan [Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., II. Ser. 4, 373—382 (1935); dies. Zbl. 12, 402]. Unter Anwendung eines von N. Higaki [Tôhoku math. J. 41, 70—79 (1935); dies. Zbl. 12, 208] bewiesenen Tauberschen Satzes für die typischen Mittel von Riesz gewinnt Verf. den folgenden Satz: $f(t)$ sei eine gerade integrierbare Funktion mit dem Integralmittelwert 0,

$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$. Ferner sei $\varphi(x)$ eine positive differenzierbare Funktion mit

$\varphi'(x) > 0$, es sei $\Phi(x) = \int_0^x (1/u \varphi(u)) du$ (mit x wachsend) und $\mu(x, A) = 1/\Phi^{-1}(\Phi(x) - A)$. Wenn die Bedingung

$$F^*(t) = \int_0^t |f(u)| du = O\left(\frac{t}{\varphi(t^{-1})}\right)$$

erfüllt ist und eine positive Konstante A existiert, so daß $a_n > -\mu(n, A)$ gilt, folgt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.
Viktor Garten.

Yano, Shigeki: Notes on Fourier analysis. II. Proof of maximal theorems for Fourier series. Math. Japon. 1, 45—48 (1948).

L'A. con un metodo di R. Salem [questo Zbl. 10, 396] dimostra il seguente teorema: Se $f(x) \in L^2$, periodica di periodo 2π ,

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

sussiste allora la limitazione

$$\left[\int_0^{2\pi} \max_n \frac{s_n^2(x)}{\log(n+2)} dx \right]^{1/2} \leq A \int_0^{2\pi} f^2(x) dx,$$

dove A è una costante assoluta. Tale teorema rientra in uno più generale di J. E. Littlewood e R. E. A. C. Paley [questo Zbl. 15, 254]. — Con lo stesso metodo si possono trovare le limitazioni: a) se $|f(x)| \log^+ |f(x)| \in L$, si ha allora

$$\int_0^{2\pi} \max_n \left| \frac{s_n(x)}{\log(n+2)} \right| dx \leq A \int_0^{2\pi} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx + B,$$

con A e B costanti assolute (cfr. A. Zygmund, questo Zbl. 19, 16); b) se $f(x) \in L$, e $0 < r < 1$

$$\left[\int_0^{2\pi} \max_n \left| \frac{s_n(x)}{\log(n+2)} \right|^r dx \right]^{1/r} \leq A_r \int_0^{2\pi} |f(x)| dx,$$

con A_r costante assoluta.

Giovanni Sansone.

Tsuchikura, Tamotsu: Notes on Fourier analysis. III. Convergence character of Fourier series at a point. Math. Japon. 1, 135—139 (1949).

$f(x)$ sei eine über $(0, 2\pi)$ L^p -integrierbare Funktion ($p > 1$), und $s_n(x)$ bzw. $\sigma_n(x)$ bedeute die n -te Teilsumme bzw. das arithmetische Mittel der Teilsummen der zu $f(x)$ gehörigen Fourierreihe. Ferner sei $\varphi_x(t) \equiv \varphi(t) \equiv f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$.

Verf. zeigt: Satz 1. Wenn die Bedingung $\Phi_s(t) \equiv \int_0^t |\varphi_x(u)|^s du = O(t/(\log 1/t)^{se})$

bei $t \rightarrow 0$ für ein $s > 1$ und $\varepsilon > 0$ an der Stelle x erfüllt ist, so konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n(x) - f(x)|^k/n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n(x) - \sigma_n(x)|^k/n$ für jeden Wert $k > 1/\varepsilon$. Für $k \leq 1/\varepsilon$ trifft die Aussage nicht zu, wie durch ein Beispiel belegt wird.

Satz 2. Unter der Voraussetzung des Satzes 1 gilt $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n(x) - f(x)|^e/n \log n < \infty$

und $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n(x) - \sigma_n(x)|^e / n \log n < \infty$ für jedes $e > 0$. Satz 3. Unter der Voraussetzung des Satzes 1 kann man die Folge aller natürlichen Zahlen in zwei komplementäre Klassen $\{n_i\}$ und $\{m_i\}$ einteilen derart, daß $s_{n_i}(x) \rightarrow f(x)$ für $i \rightarrow \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m_i} < \infty$ gilt, oder allgemeiner, wenn $e(n)$ eine beliebige, nicht-abnehmende Funktion bedeutet, $\{s_{n_i}(x) - f(x)\} / e(n_i) \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} (e(m_i))^{\alpha} / m_i < \infty$ für jedes $\alpha > 0$. Viktor Garten.

Izumi, Shin-ichi and Noboru Matsuyama: Notes of Fourier analysis. IV. On the absolute Riesz summability of Fourier series. Math. Japon. 1, 140—150 (1949).

Die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt nach dem Verfahren der Rieszschen logarithmischen Mittel der Ordnung k absolut summierbar, kurz $|R, \log n, k|$ -summierbar, wenn die Folge ihrer Rieszschen logarithmischen Mittel

$$R_k(\omega) = (\log \omega)^{-k} \sum_{n < \omega} \left(\frac{\log \omega}{n} \right)^k a_n$$

von beschränkter Schwankung ist, d. h. $\sum_{\omega=1}^{\infty} |R_k(\omega) - R_k(\omega + 1)| < \infty$ bzw.

$\int_0^{\infty} |R'(\omega)| d\omega < \infty$, wenn ω als stetige Veränderliche betrachtet wird. Izumi

und Kawata hatten in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 21, 21) die $|R, \log n, 1|$ -Summierbarkeit von Fourierreihen untersucht. Gegenstand der vorliegenden Mitteilung ist die Aufstellung entsprechender Sätze für die $|R, \log n, k|$ -Summierbarkeit mit $k \geq 1$. — Es sei $\varphi(t)$ eine mit der Periode 2π periodische, integrierbare, gerade Funktion mit dem Integralmittelwert 0. Ferner sei $\varphi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

Die Rieszschen logarithmischen Mittel k -ter Ordnung der zu $\varphi(x)$ gehörigen Fourierreihe werden dann $R_k(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{(\log \omega)^k} \int_0^{\infty} L_k(\omega t) \varphi(t) dt$ für $k > 0$. Für $k \geq 1$ gilt für jedes $\eta > 0$

$$R_k(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{(\log \omega)^k} \int_0^{\eta} L_k(\omega t) \varphi(t) dt + O\left(\frac{1}{\log \omega}\right)$$

mit

$$L_k(t) = \Gamma(k+1) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p t^p}{(2p+1)^{k+2} (2p)!}.$$

Die Rieszschen logarithmischen Mittel einer Funktion $\varphi(t)$ von der Ordnung $\alpha \geq 0$ werden durch $\psi_{\alpha}(t) = \varphi_{\alpha}(t) / (\log 1/t)^{\alpha}$ definiert, wobei $\varphi_0(t) = \varphi(t)$, $\varphi_s(t) =$

$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_t^1 \left(\log \frac{u}{t} \right)^{s-1} \frac{\varphi(u)}{u} du$ ($s > 0$) gesetzt ist. Folgende Sätze werden bewiesen:

1. Wenn $s > 0$ und für jedes $\varepsilon > 0$ $\psi_s(t) = O(1/(\log 1/t)^{\varepsilon})$ ist, dann ist die Fourierreihe von $\varphi(t)$ bei $t = 0$ für $\sigma > s + 1$ $|R, \log n, \sigma|$ -summierbar. — 2. Wenn

$s > 0$ und für ein festes δ und ein geeignetes $p > 1$ $\int_0^{\delta} |\psi_1(t)|^p / t dt < \infty$ ist,

dann ist die Fourierreihe von $\varphi(t)$ bei $t = 0$ für $\sigma > s + 1$ $|R, \log n, \sigma|$ -summierbar. — 3. Wenn $s > 0$ und $\psi_s(t)$ der Bedingung in Satz 1. genügt, dann ist die Fourierreihe von $\varphi(t)$ bei $t = 0$ $|R, \log n, s + 1|$ -summierbar. — 4. $f(x)$ sei integrierbar und $s_n(x)$ die n -te Teilsumme der Fourierreihe von $f(x)$. Wenn für $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$

und $t \rightarrow 0$ die Bedingung $q(t) = O(1/\log^s(1/t))$ erfüllt ist, gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |s_k(x) - f(x)|^2 = O(\log^{1-2s} n).$$

5. Wenn $f \in L$ und für $\varepsilon > \frac{1}{2}$ die Bedingung $q_x(t) = O(1/\log^s(1/t))$ erfüllt ist, so gilt $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(s_n(x) - f(x))^2}{n \log n} < \infty$. Viktor Garten.

Yano, Shigeki: Notes on Fourier analysis. XIX. A remark on Riemann sums. Tôhoku math. J., II. Ser. 2, 1—3 (1950).

Für eine integrierbare Funktion $f(x)$ mit der Periode 1 sei $f_n(x)$ die Riemannsche Summe $n^{-1} \sum_{k=1}^n f(x + k n^{-1})$. Es handelt sich um hinreichende Bedingungen für

die fast-überall-Konvergenz von $f_n(x)$ gegen $\int_0^1 f(x) dx$. Von J. Marcinkiewicz und R. Salem (dies. Zbl. 22, 330) wurde als eine solche Bedingung angegeben die Zugehörigkeit von $f(x)$ zu der Lipschitz-Klasse $\text{Lip}(\varepsilon, 2)$ für ein $\varepsilon > 0$ [es ist $\text{Lip}(\alpha, p)$ durch die Bedingung $\int_0^1 |f(x+t) - f(x)|^p dx = O(t^{\alpha p})$ definiert]. Verf.

bemerkt, daß aus diesem Satz und einem Satz von Hardy und Littlewood folgt, daß auch die Zugehörigkeit zu $\text{Lip}(1/p - 1/2 + \varepsilon, p)$ (wo $\varepsilon > 0$, $1 < p \leq 2$) eine hinreichende Bedingung ist. Falls $1 \leq p < 2$, ist dieses Resultat für $\varepsilon = 0$ nicht mehr richtig. Verf. gibt weiter hinreichende Bedingungen für die fast-überall-Konvergenz einer Teilfolge $f_{n_k}(x)$ von $f_n(x)$ und zwar: 1. $f(x)$ gehört zu $\text{Lip}(\alpha, p)$, $0 < \alpha \leq 1$, $p \geq 1$, und $\sum n_k^{-\alpha}$ konvergiert; 2. $\int_0^1 |f(x+t) - f(x)| dx = O((\log^s t^{-1})^{-1})$ ($s > 1$) und $\sum (\log n_k)^{-s}$ konvergiert (vgl. auch R. Salem, dies. Zbl. 34, 321).

Hendrik Douwe Kloosterman.

Džvaršejšvili, A. G.: Über ein Konvergenzkriterium der Fourierreihe. Soobščeniia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 11, 403—407 (1950) [Russisch].

E sei eine abgeschlossene Punktmenge in $(-\pi, \pi)$; $mE > 0$; $\cup I_k$ die Komplementärmenge von E , dargestellt als Vereinigung abzählbar vieler getrennter Intervalle; f 2π -periodisch und L_1 -integrierbar; $\omega(f, I_k)$ die Schwankung von f in I_k . Verf. beweist den Satz: Ist $f(x) = 0$ für $x \in E$ und gilt $\sum \omega(f, I_k) < \infty$, so konvergiert die Fourierreihe von f in jedem Häufungspunkt von E zum Werte Null. — Es folgt noch eine naheliegende Anwendung auf Entwicklungen von Funktionen der Form $f(x) - g(x)$ (vgl. das bekannte Buch von Zygmund: Trigonometrical series; dies. Zbl. 11, 17; S. 24).

Karl Zeller.

Bicadze, A. V.: Über ein Funktionensystem. Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 4 (38), 154—155 (1950) [Russisch].

Es wird der Satz bewiesen: Wenn die Funktion $f(\vartheta)$ im Intervall $0 \leq \vartheta \leq \pi$ der Hölderschen Bedingung genügt, so läßt sie sich daselbst in eine gleichmäßig konvergente Reihe mit dem vollständigen Funktionensystem $\cos n\vartheta + \sin n\vartheta$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, der Art $f(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\cos n\vartheta + \sin n\vartheta)$ entwickeln. Der Beweis beruht auf folgender Tatsache: Eine holomorphe Funktion $F(z) = u + iv$ ist im Einheitskreis $|z| < 1$ durch die Randwerte $u|_L = f(\vartheta)$ für den oberen Halbkreis L und $v|_{\bar{L}} = -f(-\vartheta)$ für den unteren Halbkreis \bar{L} (eindeutig) bestimmt, und zwar ist

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \sqrt{z^2 - 1} \int_L \frac{f(\vartheta)}{\sqrt{t^2 - 1}} \frac{dt}{t - z} - \frac{1}{\pi i} \sqrt{z^2 - 1} \int_{\bar{L}} \frac{f(-\vartheta)}{\sqrt{t^2 - 1}} \frac{dt}{t - z}$$

mit dem Hauptzweig der Wurzel. Mit ihrer Hilfe gelingt es, den obigen Entwicklungssatz auf die Entwicklung gerader und ungerader Funktionen, die der Hölder'schen Bedingung genügen, zurückzuführen. *Erik Svenson.*

Morse, Marston and William Transue: The Fréchet variation and Pringsheim convergence of double Fourier series. Contrib. Fourier Analysis, Ann. Math. Studies Nr. 25, 46—103 (1950).

Von Gergen [Trans. Amer. math. Soc. 35, 29—63 (1933); dies. Zbl. 6, 112] wurden für die Pringsheim-Konvergenz einer doppelten Fourierreihe einer integrierbaren Funktion $f(x, y)$, die in beiden Variablen gerade und periodisch von der Periode 2π ist, eine Reihe von hinreichenden Konvergenzkriterien zusammengestellt und in ihrem wechselseitigen Verhältnis untersucht, in denen von einer sog. Vitali-Variation einer Funktion Gebrauch gemacht wird. Ist g in einem zweidimensionalen Intervall integrierbar definiert, so wird unter der V -Variation des unbestimmten Integrals \bar{g} von g über Q der Ausdruck $V(Q, \bar{g}) = \iint_Q |g(x, y)| dx dy$

verstanden. Ist $s_{m,n}$ die (m, n) -Partialsumme der Fourierreihe an einer bestimmten Stelle, so konvergiert die Reihe im Pringsheimschen Sinne gegen die Summe s , falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ so gibt, daß $|s_{m,n} - s| < \varepsilon$ für alle $m, n > N(\varepsilon)$ ist. — Verff. geben statt der Gergenschen Bedingungen neue Bedingungen an, die sich von den Gergenschen Bedingungen dadurch unterscheiden, daß die Vitalische Variation durch eine Fréchet'sche Variation ersetzt wird. Von dieser Fréchet'schen Variation [Trans. Amer. Math. Soc. 16, 215—234 (1915)] haben Verff. bereits in mehreren Arbeiten Gebrauch gemacht (vgl. z. B. dies. Zbl. 32, 209, 33, 359). — Es zeigt sich, daß die Menge der Funktionen, die einer der von Gergen aufgezählten Bedingungen genügen, eine echte Untermenge der Funktionen ist, die der entsprechenden Bedingung der Verff. genügen. Es kann eine Bedingung angegeben werden, die die Eigenschaft hat, daß jede einer der Gergenschen Bedingungen genügende Funktionenmenge echt enthalten ist in der dieser Bedingung entsprechenden Funktionenmenge. *Kurt Schröder.*

Spezielle Orthogonalfunktionen:

Bancroft, T. A.: Some recurrence formulae in the incomplete beta function ratio. Ann. math. Statistics 20, 451—455 (1949).

La funzione beta incompleta può essere espressa in termini della serie ipergeometrica di Gauss. Approfittando delle relazioni tra funzioni ipergeometriche contigue l'A. dà formule ricorrenti per la funzione beta incompleta. — Queste formule ricorrenti possono essere usate per il computo numerico della funzione beta incompleta fuori dei limiti delle tavole di K. Pearson; e in effetti l'A. sta preparando una estensione di tali tavole. *Giuseppe Pompilj.*

Bailey, W. N.: Some identities in combinatory analysis. Proc. London math. Soc. II. Ser. 49, 421—435 (1947).

Der mathematische Gedanke der Arbeit besteht im wesentlichen darin, die sogenannten Rogers-Ramanujanschen Identitäten sowie einige damit verwandte Beziehungen systematisch in die Theorie der „basischen hypergeometrischen“ Reihen (zur Definition vgl. z. B. das Referat zu M. Jackson, dies. Zbl. 35, 167) einzuordnen. Die genannten Identitäten lassen sich ja mit Hilfe derartiger Reihen aufschreiben, und zwar gestatten sie, die Reihensumme für gewisse spezielle Argumentwerte durch unendliche Produkte auszudrücken. Es entspricht dies genau der bekannten Summierung der Gaußschen hypergeometrischen Reihe für $x = 1$ durch Gammafunktionen. Es gelingt dem Verf., durch virtuose Handhabung einiger bekannter Transformationsformeln und anschließende Koeffizientenvergleiche eine Reihe bekannter Identitäten — darunter die Rogers-Ramanujanschen — einheit-

lich zu beweisen und weitere interessante Relationen herzuleiten. — Die Abkürzungen und die Indizesbezeichnungen sind z. T. nicht ganz einheitlich gewählt, so daß einzelne Formeln zunächst mißverstanden werden können.

Wolfgang Hahn.

Pollaczek, Félix: Systèmes de polynomes biorthogonaux à coefficients réels. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1553—1556 (1949).

$a(z)$, $b(z)$, $d(z)$ seien ganze rationale Funktionen mit reellen Koeffizienten, $a(z)$ sei vom Grade N , $d(z)$ vom Grade $2n$ mit nur reellen Wurzeln c_1, c_2, \dots, c_{2n} , und es bestehe die Gleichung $a^2(z) - b^2(z) \cdot d(z) = 1$. Wir legen n Verzweigungsschnitte von $c_{2\nu-1}$ nach $c_{2\nu}$ und betrachten das Blatt, auf dem $\sqrt{d(z)} \rightarrow z^n$ für $z \rightarrow \infty$. Wir definieren $\Theta(z) = i^{-1} \log(a(z) - b(z) \sqrt{d(z)})$. $\Theta(z)$ läuft von 0 bis $N\pi$, wenn z auf den unteren Rändern der n Verzweigungsschnitte von $c_{2\nu}$ bis c_1 läuft. — $f(z)$ sei eine Polynom vom Grade n , dessen Nullstellen γ_i zwischen c_{2i-1} und c_{2i} liegen. — Die Lösung der Differentialgleichung

$$[x^2 - 2x a(z) + 1] du/dx + [x - a(z) - b(z) \cdot f(z)] u = 0$$

mit $a(z) = \sum_{\nu=0}^N e_{\nu} z^{\nu}$ und $a(z) + b(z) \cdot f(z) = \sum_{\nu=1}^N e_{\nu} z^{\nu}$ sei $g_N(x, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} P_{\nu, N}(z)$. Dann gilt

für die beiden Polynomfolgen $z^{\lambda} P_{\nu, N}(z)$ ($\lambda = 0, 1, \dots, N-1$; $\nu = 0, 1, \dots$) und

$P_{\mu, N}(z) \sum_{j=0}^{N-k-1} (2\mu e_{j+k+1} + e_{j+k+1}) z^j$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$; $\mu = 0, 1, \dots, n$) die Gleichung

$$\int P_{\mu, N}(z) P_{\nu, N}(z) \sum_{j=0}^{N-k-1} (2\mu e_{j+k+1} + e_{j+k+1}) z^j z^{\lambda} d\bar{z} = \delta_{k\lambda} \delta_{\mu\nu}.$$

Das Integral ist über die unteren Ränder der n Verzweigungsschnitte zu nehmen und die Gewichtsfunktion $\varrho(z)$ ist

$$\varrho(z) = (-1)^{\nu} \exp[-i(\Theta - \nu\pi) f(z)/d(z)] [1 + \exp(-i\pi f(z)/\sqrt{d(z)})]^{-1};$$

$\nu\pi < \Theta < (\nu+1)\pi$; $\nu = 0, \dots, N-1$.

Paul August Mann.

Pollaczek, Félix: Sur une généralisation des polynomes de Legendre. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1363—1365 (1949).

Die Differentialgleichung $(x^2 - 2xz + 1) du/dx + (x - (a+1)z - b)u = 0$ hat als Lösung $u = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} P_{\nu}(z; a, b)$, wo P_{ν} Orthogonalpolynome vom Grade ν in z sind ($-1 < z < 1$). Die Gewichtsfunktion lautet

$$\varrho(\cos t) = \frac{\exp[(t/\sin t)(a \cos t + b)]}{1 + \exp[(\pi/\sin t)(a \cos t + b)]}, \quad z = \cos t.$$

Die P_{ν} gehorchen der Rekursionsformel $(\nu+1)P_{\nu+1} - [(2\nu+1+a)z + b]P_{\nu} + \nu P_{\nu-1} = 0$, $P_0 = 1$. Für $a = b = 0$ gehen die Polynome P_{ν} in die Legendreschen Polynome über.

Paul August Mann.

Pollaczek, Félix: Systèmes de polynomes biorthogonaux qui généralisent les polynomes ultra-sphériques. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1998—2000 (1949).

Die Polynome $P_n(z; a, b)$ (s. vorsteh. Referat) werden durch Hinzunahme eines Parameters λ zu $P_n(z; \lambda, a, b)$ verallgemeinert, wobei $g(x, z) = \sum x^{\nu} P_{\nu}(z)$ als Lösung der Diff.-Gl. $(x^2 - 2xz + 1) du/dx + [2\lambda(x-z) - a z - b]u = 0$ definiert ist. Sie sind orthogonal mit der Gewichtsfunktion

$$\varrho(z) = \pi^{-1} 2^{\lambda-2} e^{(2t-\pi)\tau} \Gamma(\lambda + i\tau) \Gamma(\lambda - i\tau) (1 - z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}},$$

wo $z = \cos t$, $\tau = (a \cos t + b)/2 \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$, und genügen der Rekursionsformel

$$n P_n(z) = [2n - 2 + (2\lambda + a)z + b] P_{n-1}(z) - (n-2 + 2\lambda) P_{n-2}(z).$$

Für $\lambda = \frac{1}{2}$ ergeben sich die $P_n(z; a, b)$. — Ähnlich lassen sich die Funktionen $P_{\nu, N}(z)$ (s. vorletztes

Referat) verallgemeinern, indem man die Lösung $g_N(x, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} P_{\nu, N}(z, \lambda, a(z), b(z), d(z), f(z))$

der Diff.-Gl. $(x^2 - 2x a(z) + 1) du/dz + [2\lambda(x - a(z)) - b(z) \cdot f(z)] u = 0$ betrachtet. Setzt

man $2\lambda a(z) + b(z) \cdot f(z) = \sum_{\nu=0}^N e_{\nu} z^{\nu}$ und die Gewichtsfunktion

$$\varrho = (-1)^{\nu} \pi^{-1} 2^{2\lambda-2} \exp[2(t - (2\nu+1)\pi)\tau] \Gamma(\lambda + i\tau) \Gamma(\lambda - i\tau) |b(z) \sqrt{d(z)}|^{2\lambda-1}$$

mit

$t = i^{-1} \log(a(z) - b(z) \sqrt{d(z)}); \tau = f(z)/2i \sqrt{d(z)}; \Re \lambda > 0; \nu\pi < t < (\nu+1)\pi, \nu = 0 \dots N-1$,

so bleiben die Orthogonalitätsrelationen erhalten.

Paul August Mann.

Funktionentheorie:

• Borel, Émile: *Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions*. Paris: Gauthier-Villars 1950. 148 p. 1000 fr.

Bermant, A. F. und A. I. Markuševič: *Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen*. Matematika v SSSR 1917—1947, 319—414 (1948) [Russisch].

Das Gesamtwerk stellt die russische Mathematik in den 30 Jahren 1917—1947 dar, etwa nach Art der Enzyklopädie bzw. der Faltberichte. Das vorliegende Kapitel über komplexe Funktionentheorie ist wie folgt gegliedert: § 1. Konforme Abbildung. § 2. Innere Eigenschaften schlichter Funktionen. § 3. Innere Eigenschaften analytischer Funktionen. § 4. Randeigenschaften. § 5. Folgen und Reihen. § 6. Charakteristische Eigenschaften. Verallgemeinerungen. Die Bibliographie ist für das Kapitel Mengen und Funktionen zusammengefaßt (vgl. dies. Zbl. 41, 22). — Wir heben einige bemerkenswerte Punkte der Darstellung hervor; diese ist, leider, innerhalb der genannten Abschnitte mehr willkürlich als systematisch geordnet. Zu § 1. Übersicht über die Entstehung der Hauptsätze der Theorie der konformen Abbildung außerhalb Rußlands. Allg. Eigenschaften: Lavrentievs Verheftung und ihre Verallgemeinerung nach Volkovskij. Praktische Verfahren zur konf. Abb. (Goluzin) bei mehrfachem Zusammenhang, Integralgleichungen nach Keldyš, dessen Beweis für Koebes Abbildung auf Normalgebiete, Näherungsverfahren nach Kontorovič und Krylov, Volkovskijs erste Ergebnisse zum Typenproblem. Verhalten der Abbildungsfunktion Kreis \rightarrow abgeschlossener Bereich. Randabbildung. Abschätzungen für das Maß von Randpunktmengen bei der Abbildung (Lusin, Privalov, Lavrentiev, Benjaminov u. a.). Randeigenschaften der Ableitung. Zu § 2. Überdeckungsfragen. Verzerrungsprobleme und Extremaleigenschaften. Genaue Form des Drehungssatzes (Goluzin, Basilevič), Anwendungen der Löwnerschen Methode. Koeffizientenprobleme bei schlichter Abbildung und Verwandtes. Mehrfach zusammenhängende Gebiete. In diesem Paragraphen stehen Arbeiten von Goluzin, Keldyš, Lavrentiev im Vordergrund. Zu § 3. Überlagerungssätze und das Prinzip von Lindelöf (Bermant, dies. Zbl. 41, 43). Beschränkte Funktionen und deren Verallgemeinerungen. Endlichvielblättrige Abbildungen. Funktionen im Kreis und automorphe Funktionen. Zu § 4. Existenz von Rand(Ziel-)werten und zugehörige Einzigkeitssätze (Privalov), Darstellung analyt. Funktionen aus Randwerten, Verallgemeinerungen der Integralformeln (Lusin, Privalov, Smirnov, Fedorov u. a.). Analyt. Funktionen, die auf ihrer Singularitätenmenge stetig bleiben. Zu § 5. Taylorreihen (Sätze von Lusin, Privalov, Markuševič, Gončarov, Morduchaj-Boltovskoj, Gelfond u. v. a. m.). Dirichletreihen. Annäherung im Komplexen. Vollständigkeit von Systemen. Interpolation und zugehörige Einzigkeitssätze (Gelfond, Golubev, Gončarov, Levin). Variable Folgen und Reihen, z. B. Markuševič über Basen im Raum der analyt. Funktionen, Geronimus' Orthogonalpolynome u. v. a. m. Zu § 6. Was ist eine monogene Funktion? Gerade hierzu finden sich wesentliche Leistungen russischer Mathematiker. Quasikonforme Abbildung (vor allem Lavrentiev, Meňšov, Šabat). Harmonische und Subharmonische Funktionen (Privalov u. a.). Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen (Fuks).

Egon Ullrich.

Džrbašjan, M. M.: *Metrische Sätze über die Vollständigkeit und die Darstellbarkeit analytischer Funktionen*. Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 3 (37), 194—198 (1950) [Russisch].

Es handelt sich um einen Vortragsbericht über eine Moskauer Doktorarbeit. Vgl. zum Thema auch dies. Zbl. 36, 45 und das folgende Referat. — Es wird die Vollständigkeit gewisser Funktionen- und speziell Polynomensysteme insbesondere für unbeschränkte Gebiete untersucht, deren Komplement zerfallen kann. Aus früheren Arbeiten (S. Bernstein, Šaginjan) weiß man, daß man mit Bedingungen zu rechnen hat, bei denen sowohl die topologischen wie die metrischen Eigenschaften des Grundgebiets von Einfluß sind. — Verf. benutzt als Methode Darstellungen

durch Gebietsintegrale vom Typus $F(z) = \iint_D \frac{\bar{f}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\bar{\zeta}$; die Approximationseigenschaft, welche

der Vollständigkeitsuntersuchung zugrunde liegt, beruhe auf einer Bewichtung (u. U. der trivialen); alle Momente von $\bar{f}(z)$ (in bezug auf diese) mögen verschwinden. Das obige Integral liefert dann eine analytische Funktion im Äußeren der Approximationsgebiete; das wird systematisch ausgenutzt. — Zunächst werden einfach zusammenhängende Gebiete $G\{\alpha_i\}$ behandelt, die aus der endlichen Ebene durch Fortlassen endlich vieler und fremder Winkelräume entstehen; π/α_i sei deren Öffnung, $\alpha = \max \alpha_i$. Sei dann $\omega(t) \uparrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$, $p(r) = p(1) + \int_1^r \omega(t) d \log t$ und $H_2(e^{-p(r)})$ die Klasse aller der regulären Funktionen $f(z)$ in $G\{\alpha_i\}$, für die $\iint_{G\{\alpha_i\}} |f(z)|^2 e^{-p(r)} dx dy < \infty$ bleibt ($r = |z|$). Für die Vollständigkeit des Systems aller Polynome im Sinne von $\inf_{\{Q\}} \iint_{G\{\alpha_i\}} |f(z) - Q(z)|^2 e^{-p(r)} dx dy = 0$ ist dann notwendig und hin-

reichend die Konvergenz von $\int_{r^{1+\alpha}}^{\infty} \frac{p(r)}{r^{1+\alpha}} dr$. Verallgemeinerungen auf Gebiete, die aus $G\{x_i\}$ durch „leichtes Verbiegen“ der Winkelränder entstehen. Sonderfall: Parallelstreifen, Sichel zwischen berührenden Kreisen usw. — Es folgen Vollständigkeitsuntersuchungen für Systeme z^{λ_n} in der von $-\infty$ nach 0 geschlitzten Ebene, wo $0 < \lambda_n \uparrow \infty$ mit $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq c > 0$. Ferner für Systeme, die aus einer ganzen Funktion $g(z)$ mittels einer Folge a_n hervorgehen: $g(r_n z)$. (Vgl. hierzu auch Ibragimov, dies. Zbl. 36, 184.) — Der IV. Teil der Arbeit gilt analytischen Funktionen im Einheitskreis, insbes. der Klasse $H_p(\alpha)$, für die gilt:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{i\vartheta})|^p (1 - \varrho^2)^\alpha \varrho d\varrho d\vartheta < +\infty.$$

Für $p \geq 1$, $\alpha > -1$, $|z| < 1$ gilt dann die Integraldarstellung

$$(1) \quad f(z) = \frac{\alpha + 1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{f(\varrho e^{i\vartheta})}{(1 - z\varrho e^{-i\vartheta})^{\alpha+2}} (1 - \varrho^2)^\alpha \varrho d\varrho d\vartheta.$$

Zusammen mit einigen Einzigkeitssätzen für die Klasse erlaubt diese Darstellung, mehrere Probleme in bezug auf die Vollständigkeit von Systemen wie $(1 - a_n z)^\gamma$ zu lösen, wenn $\gamma < 0$, $|a_n| > 1$ ist und die Häufungspunkte der a_n auf $|a| = 1$ liegen. — Für die Funktionenklasse,

deren Charakteristik $T(r, f)$ (Wertverteilungslehre!) $\int_0^1 T(r) (1 - r)^\alpha dr < \infty$ bei $\alpha > -1$ erfüllt, werden Verallgemeinerungen der Blaschkeschen Produktdarstellungen gegeben, die im Zusammenhang der Darstellungssätze nicht übersehen werden dürfen. Für ganzzahliges $\alpha = q \geq 0$ reduzieren sich diese Aussagen auf eine Form, die den Weierstraßprodukten bei ganzen Funktionen endlichen Geschlechts analog ist. Bei unganzen α treten noch Faktoren hinzu, die den Integralen (1) nahestehen; innen ist f durch $\log f$ bzw. \log eines Linearfaktors ersetzt, außen tritt \exp davor. — Endlich wird eine Extremalaufgabe behandelt, die dem Problemkreis nahesteht.

Egon Ullrich.

Džrbašjan, M. M.: Über die Vollständigkeit des Funktionensystems $\{z^{\lambda_n}\}$ in einem Kreise mit radialem Einschnitt. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 74, 173—176 (1950) [Russisch].

Sei $0 < \lambda_n \uparrow$ eine Folge positiver, wachsender Zahlen; das System der Potenzen z^{λ_n} wird auf seine Vollständigkeit untersucht, wozu z auf den längs der negativ-reellen Achse aufgeschnittenen Einheitskreis D_0 beschränkt wird. Der Untersuchung wird eine in D_0 positive und beschränkte, sowie integrierbare Gewichtsfunktion $h(z)$ zugrunde gelegt. Es bezeichne $H_2(h)$ die Gesamtheit aller in D_0 regulären Funktionen $f(z)$, für welche das Integral $\iint_{D_0} |f(z)|^2 h(z) dx dy$

existiert. Das System $\{z^{\lambda_n}\}$ heiße dann vollständig beim Gewicht $h(z)$, wenn jedes $f(z) \in H_2(h)$ durch die „Polynome“ vom Typus $P_\lambda(z) = \sum_{v=1}^n a_v z^{\lambda_v}$ beliebig genau approximierbar ist, derauf daß gilt $\liminf_{P_\lambda} \iint_{D_0} |f(z) - P_\lambda(z)|^2 h(z) dx dy = 0$. Sätze von Keldyš [Mat. Sbornik, n. Ser.

16, Nr. 3 (1945); in Deutschland unzugänglich] brachten im Sonderfall $\lambda_n = n - 1$ eine Bedingung für das Verhalten der Gewichte $h(z)$ nahe $\arg z = \pi$, unter der die Folge $\{z^n\}$ als vollständig bei $h(z)$ gelten durfte. Verf. erweitert diese Aussagen auf allgemeinere Exponentenfolgen λ_n und findet als hinreichend für Vollständigkeit von $\{z^{\lambda_n}\}$ in D_0 beim Gewicht $h(z)$: Es sei $h(z) \leq A h(z^{1/\alpha})$ für $1 \leq \alpha \leq \alpha_0$ bei konstanten A, α_0 ; sei ferner, bei $H(\theta) = \limsup_{0 < r < 1} h(r e^{i\theta})$,

für $\theta \rightarrow +0$ stets $v = -(1/2\theta) \ln H(\pi - \theta) \uparrow + \infty$; ist $\theta = p(v)$ die zugehörige Umkehrfunktion, so sei endlich die Anzahlfunktion $n(v)$ der Folge $\{\lambda_n\}$ mit $p(v)$ verknüpft durch die Bedingung

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \left\{ n(v) \left(\frac{1}{v} + \frac{v}{R^2} \right) + p(v) - 1 \right\} \frac{dv}{v} = +\infty.$$

Der Beweis dieses Satzes gelingt durch

das Studium der Funktion $F(w) = \iint_{D_0} f(z) z^w \cdot h(z) dx dy$. Sie ist identisch gleich 0, wenn $F(\lambda_n) = 0$ für alle Exponenten einer λ -Folge obiger Art gilt und $f(z) \in H_2(h)$ gehört. Das folgt rasch aus der Schwarzschen Ungleichung, im wesentlichen unter Berufung auf den bekannten Sonderfall.

Egon Ullrich.

Scheen, W. L.: Fakultätenreihen. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1950, 006, 30 S. (1950) [Holländisch].

Verf. definiert als verallgemeinerte Beta-Integrale

$$(1) \quad B(\alpha, \beta; \psi(t)) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} \psi(t) dt \quad \text{für } \operatorname{Re} \alpha > q_0, \operatorname{Re} \beta > q_1,$$

$$(2) \quad B_1(\alpha, \beta; \psi(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_W t^{\alpha-1} (t-1)^{\beta-1} \psi(t) dt \quad \text{für } \operatorname{Re} \alpha > q_0,$$

wobei W der Schleifenweg ist, der, von der negativ reellen Achse kommend, den Punkt 1 positiv umläuft, und $\psi(t)$ jeweils eine geeignete analytische Funktion ist, welche die Existenz des Integrals gewährleistet. Er setzt nun $\psi(t) = g(t) \cdot \varphi(t)$, $t^q \varphi(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_{\kappa} (1-t)^{\kappa}$ und erhält für die verallgemeinerten Beta-Integrale die Reihenentwicklungen

$$(3) \quad B(\alpha, \beta; \psi(t)) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_{\kappa} \int_0^1 t^{\alpha-q-1} (1-t)^{\beta-1+\kappa} g(t) dt,$$

$$(4) \quad B_1(\alpha, \beta; \psi(t)) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^{\kappa} a_{\kappa} \int_W t^{\alpha-q-1} (t-1)^{\beta-1+\kappa} g(t) dt.$$

Indem er $g(t)$ gleich $\log^m(1-t)$ resp. $\log^m(t-1)$ setzt, erhält er die Darstellungen

$$(5) \quad B(\alpha, \beta; \varphi(t) \cdot \log^m(1-t)) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_{\kappa} \frac{\partial^m}{\partial \beta^m} B(\alpha - q, \beta + \kappa),$$

$$(6) \quad B_1(\alpha, \beta; \varphi(t) \cdot \log^m(t-1)) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^{\kappa} a_{\kappa} \frac{\partial^m}{\partial \beta^m} B_1(\alpha - q, \beta + \kappa),$$

welche er als verallgemeinerte Fakultätenreihen einführt. In der Diskussion untersucht er das Konvergenz- wie asymptotische Verhalten dieser Entwicklungen. Ausgehend von Sätzen, die Landau und Nörlund über die Konvergenzgebiete der Fakultätenreihen $\sum_{\kappa=0}^{\infty} a_{\kappa} B(\alpha, \kappa+1)$ aufgestellt haben, leitet er korrespondierende für die verallgemeinerten Fakultätenreihen ab. Ferner beweist er die Umkehrung; jede konvergente verallgemeinerte Fakultätenreihe entspricht einem verallgemeinerten Beta-Integral. In den Anwendungen gestattet seine Theorie eine bequeme Herleitung der bekannten Fakultätenreihen für $\log \Gamma(z)$, $\Psi(z)$, $Ei(z)$ usw. Auch die Integraldarstellung von Poisson für die Besselfunktionen ist nach dieser Methode zugänglich. Hans Habsch — Egon Ellrich.

Biernacki, M.: Sur quelques applications de la formule de Parseval. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 4, 23—39 und polnische Zusammenfassg. 39—40 (1950).

Soient $f(z) = \sum a_n z^n$ et $g(z) = \sum b_n z^n$ deux fonctions holomorphes resp. dans $|z| < R_1$ et $|z| < R_2$. La formule classique de Parseval donne une expression de la fonction $H(f, g) = \sum a_n b_n z^n$, holomorphe dans $|z| < R_1 R_2$, sous forme d'une intégrale portant sur les fonctions f et g . Parmi les nombreuses applications de cette formule indiquées par l'A. citons les suivantes: Si $|\arg f| \leq \alpha \pi$, $|\arg g| \leq \beta \pi$ avec $\alpha + \beta < \frac{1}{2}$, alors $|\arg H(f, g)| \leq (\alpha + \beta) \pi$ dans $|z| < R_1 R_2$. — En supposant $R_1 = R_2 = 1$ et en introduisant la valeur moyenne $I(r, f)$ de $|f|$ sur $|z| = r < 1$, on a $I(r, H(f, g)) \leq I(\sqrt{r}, f) \cdot I(\sqrt{r}, g)$. Conséquences: 1° Si $D^{\alpha} f$ est la dérivée généralisée de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de f , on a $I(r, D^{\alpha} f) < I(\sqrt{r}, f) \cdot \varphi(r, \alpha)$ où φ est une fonction donnée explicitement par l'A.; 2° Si $|b_n| = |a_n|$, $I(r, g) < I(\sqrt{r}, f) \cdot (1-r)^{-1}$; 3° Si $b_n = |a_n|^2$, $I(r, g) \leq I^2(\sqrt{r}, f)$; de ce dernier résultat on peut déduire des bornes inférieures de $I(r, f)$ lorsque $|a_n| = 1$ ou $|a_n| = n^{\alpha}$ ($\alpha > 0$). — Si $|\arg f| < \alpha \pi$ et $|\arg g^{(p)}| < \beta \pi$ avec $\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}$, la fonction $H(z^p f, g)$ est complètement p -valente dans $|z| < R_1 R_2$; elle y vérifie $|\arg H^{(p)}| < \pi(\alpha + \beta)$. L'A. donne diverses extensions de ce résultat.

Jacques Dufresnoy.

Boas, jr., R. P.: Polynomial expansions of analytic functions. J. Indian math. Soc., n. Ser. **14**, 1—14 (1950).

Verf. behandelt die Entwicklung regulärer Funktionen $F(z)$ nach Appellschen Polynomreihen, welche in Bereichen der komplexen z -Ebene gleichmäßig konvergent sein sollen. Da die Appellschen Polynome formal durch die Potenzreihe

$$(1) \quad A(t) e^{zt} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z) t^n \quad \text{mit} \quad A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n, \quad \alpha_0 \neq 0$$

gegeben sind, so wird die Klasse der jeweils darstellbaren Funktionen $F(z)$ durch die Eigenschaften von $A(t)$ festgelegt. Die Methode, welche Verf. anwendet, beruht auf folgenden Formeln: Ist $F(z)$ in einem konvexen abgeschlossenen n -Eck ($n \geq 3$) regulär, so läßt sich $F(z)$ für das Innere des Polygons durch

$$(2) \quad F(z) = \sum_{m=1}^n \int_{C_m} f_m(t) e^{\alpha_m t z} dt$$

ausdrücken, wobei die α_m paarweise voneinander verschiedene komplexe Zahlen mit dem Absolutbetrag 1 sind und die $f_m(t)$ ganze Funktionen mit der Eigenschaft

$$|f_m(u + i v)| \leq h_m e^{c_m u + b_m |v|}$$

bedeuten. h_m , c_m und b_m sind gewisse Konstanten. Die Kurven C_m , welche 0 mit ∞ verbinden, sollen die reelle Achse in einer Punktfolge $\{t_n^{(m)}\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) mit $t_n^{(m)} \rightarrow \infty$ schneiden

und \int_{C_m} durch $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_n^{(m)}}$ erklärt sein. Aus (2) erhält man wegen (1) die Fundamentalformel

$$(3) \quad F(z) = \sum_{l=0}^{\infty} p_l(z) \sum_{m=1}^n \int_{C_m} f_m(t) (\alpha_m t)^l / A(\alpha_m t) dt.$$

Verf. diskutiert zunächst den Spezialfall, daß $A(t)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtypus ist, deren Nullstellen im Pfligerschen Sinne [Comment. Math. Helvetici **18**, 177—203 (1946)] meßbar sind und erzielt ein abgeschlossenes Ergebnis. Hierauf werden folgende Sätze bewiesen, die Sheffer [Duke Math. J. **3**, 593—609 (1937); dies. Zbl. **18**, 133] bereits auf anderem Wege erhalten hatte: $A(t)$ sei eine ganze Funktion von einer Ordnung kleiner 1 und $F(z)$ für $z = 0$ regulär. Ist dann \mathbb{K} der größtmögliche Kreis mit $z = 0$ als Mittelpunkt, in welchem $F(z)$ noch regulär ist, so stellt die entsprechende Appellsche Polynomreihe $F(z)$ im Innern von \mathbb{K} dar. Dasselbe gilt auch noch, wenn $A(t)$ die Ordnung 1 hat und vom Minimaltypus ist. Ist $A(t)$ vom Normaltypus der Ordnung 1 und $F(z)$ in einer hinreichend großen Umgebung von $z = 0$ regulär, so stellt die entsprechende Appellsche Polynomreihe $F(z)$ in einer von Null verschiedenen Umgebung von $z = 0$ dar. — Hierauf gibt Verf. eine Klasse von ganzen Funktionen $A(t)$ an, welche nicht vom Exponentialtypus sind, für die aber trotzdem die in einer hinreichend großen Umgebung von $z = 0$ regulären Funktionen $F(z)$ in einer gewissen Umgebung von $z = 0$ durch Appellsche Polynomreihen darstellbar sind. Ist z. B. $A(t) = e^{t^n}$ und $F(z)$ regulär in einem regelmäßigen n -Eck, dessen Mittelpunkt $z = 0$ ist und dessen Seiten senkrecht zu den Halbgeraden stehen, welche 0 mit den n -ten Einheitswurzeln verbinden, so stellt die entsprechende Appellsche Polynomreihe $F(z)$ innerhalb des dem regelmäßigen n -Ecke eingeschriebenen Kreises dar. — Die Arbeit schließt mit einem Satze über Entwicklung nach Polynomen $\{p_n(z)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), welche Sheffer [Duke Math. J. **5**, 590—622 (1939); dies. Zbl. **22**, 15] Polynomfolgen vom Nulltypus und Steffensen [Acta math. **73**, 333—366 (1941); dies. Zbl. **26**, 208] Potenzoiden nennt, die durch

$$A(t) e^{zH(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z) t^n \quad \text{mit} \quad H(0) = 0, \quad H'(0) = 1$$

definiert sind.

Ernst Lammel.

Boas jr., R. P.: Differential equations of infinite order. J. Indian math. Soc., n. Ser. **14**, 15—20 (1950).

Verf. behandelt die Lösbarkeit der Gleichung

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k F^{(k)}(z) = G(z), \quad a_0 \neq 0$$

unter gewissen Voraussetzungen über die vorgegebenen Konstanten $\{a_k\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) und über die gleichfalls bekannte Funktion $G(z)$, welche sich in einem noch näher festzulegenden Bereiche regulär verhält. Die Methode des Verf. beruht auf folgenden Formeln: Ist $F(z)$ in einem abgeschlossenen konvexen n -Eck

\mathfrak{B} regulär, dann gilt für das Innere von \mathfrak{B} : $F(z) = \sum_{m=1}^n \int_{C_m} e^{\alpha_m z t} f_m(t) dt$, wobei die α_m paarweise voneinander verschiedene komplexe Zahlen mit dem Absolutbetrage 1 sind. Jede der Kurven C_m beginnt in $z=0$ und schneidet die reelle Achse in einer Punktfolge $\{t_n^{(m)}\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) mit der Eigenschaft $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n^{(m)} = \infty$.

\int_{C_m} ist durch $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t_n^{(m)}}$ erklärt. Die Funktionen $f_m(t)$ sind ganze Funktionen mit der Eigenschaft $|f_m(t)| \leq h_m e^{c_m u + b_m |v|}$; $t = u + i v$, worin h_m , c_m und b_m von \mathfrak{B} abhängige Konstanten sind. Hat $G(z)$ dieselben Eigenschaften wie $F(z)$, so erhält man zunächst formal aus (1) $\sum_{m=1}^n \int_{C_m} [f_m(t) A(\alpha_m t) - g_m(t)] e^{\alpha_m z t} dt = 0$ mit $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ und hieraus (2) $f_m(t) = g_m(t)/A(\alpha_m t)$; $m=1, 2, \dots, n$, als formale Lösung von (1). Besitzt $A(\alpha_m t)$ keine Nullstellen auf C_m , so ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \int_{C_m} \left| \frac{t^k e^{\alpha_m z t} g_m(t)}{A(\alpha_m t)} \right| |dt| < \infty \quad (m=1, 2, \dots, n),$$

eine hinreichende Bedingung dafür, daß (2) nicht nur eine formale Lösung von (1) darstellt. — Verf. behandelt zunächst den Fall, daß $A(t)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtypus τ ist, deren Nullstellen im Pflugerschen Sinne meßbar sind, d. h. die Anzahl der Nullstellen von $A(t)$ in $|t| \leq r$, $\varphi' \leq \arg t < \varphi''$, ist

$$[N(\varphi'') - N(\varphi')] r + o(r),$$

wobei $N(\varphi)$ eine monoton wachsende Funktion von φ bedeutet und φ' , φ'' zwei beliebige Stetigkeitsstellen von $N(\varphi)$ sind. — Hierauf wird eine Klasse von ganzen Funktionen $A(t)$ betrachtet, die nicht vom Exponentialtypus sind, dafür aber anderen Beschränkungen unterworfen werden. — Ferner zeigt Verf., wie sich folgendes von Sheffer [Duke math. J. 3, 593—609 (1937); dies. Zbl. 18, 136] herührendes Theorem mit seiner Methode herleiten läßt: Ist $A(t)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtypus und ist $G(z)$ in einer hinreichend großen Umgebung von 0 regulär, so besitzt (1) eine in einer gewissen Umgebung von 0 reguläre Lösung $F(z)$. Schließlich beweist Verf., wenn $A(t)$ vom Minimaltypus der Ordnung 1 und $G(z)$ in einer Umgebung \mathfrak{G} von 0 regulär ist, daß dann (1) eine Lösung $F(z)$ besitzt, welche in jedem den Punkt 0 enthaltenden konvexen Bereich regulär ist, der nur aus Punkten von \mathfrak{G} besteht. Diese Fassung stellt eine Verschärfung des von Sheffer (loc. cit.) und Muggli [Comment. math. Helvetici 11, 151—179 (1938); dies. Zbl. 19, 346] stammenden Theorems dar, welches die Regularität von $F(z)$ nur in dem größtmöglichen Kreise behauptete, der in \mathfrak{G} enthalten ist und $z=0$ zum Mittelpunkt hat.

Ernst Lammel.

Lokki, Olli: Über Existenzbeweise einiger mit Extremaleigenschaft versehenen analytischen Funktionen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Nr. 76, 15 S. (1950).

\mathfrak{B} sei ein beschränkter schlichter Bereich mit endlich vielen, p , analytischen Randkurven Γ^μ , $\Gamma = \sum_{\mu=1}^p \Gamma^\mu$. $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \dots \rightarrow \mathfrak{B}$ sei eine Ausschöpfung von \mathfrak{B} , mit wieder analytischem Rand $\Gamma_\nu = \sum \Gamma_\nu^\mu$. Sei dann $w(z) = u + i v$ auf \mathfrak{B} analytisch, regulär oder $= \log(z - z_0) + (z - z_0) \eta(z)$ für $z_0 \in \mathfrak{B}_1$, $\eta(z)$ eindeutig regulär in \mathfrak{B} . Es wird die Klasse E derjenigen Funktionen $w(z)$ gebildet, für welche der Integralausdruck

$$(1) \quad I_{\mathfrak{B}}(w) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\nu} u dv < \infty$$

bleibt, und gezeigt: In E gibt es genau eine Funktion $w = f(z)$, welche $I_{\mathfrak{B}}(w)$ zum Minimum macht; und $e^{f(z)}$ bildet \mathfrak{B} auf einen schlichten Kreis ab, dessen Außen-

rand Bild von Γ_1 ist, während $\Gamma^2, \dots, \Gamma^p$ in konzentrisch gelegene Kreisbogen-schlitzte übergehen. — Wesentlich ist die neuartige Beweismethode für diesen (Koebe-schen) Satz. Sie ruht auf einem Gedanken von Lehto und Lokki; zunächst wird eine im Komplement von $\mathfrak{B} + \Gamma$ überall dichte Punktfolge a_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) ge-wählt, die Funktionenfolge $w_\nu(z) = (z - z_0):(z - a_\nu)$ nach einer passenden Metrik zu $\varphi_\nu(z)$ orthonormiert, und für die Funktionenklasse $\log(z - z_0) + \sum_{\lambda=1}^p e_\lambda \varphi_\lambda(z)$ die Extremale bestimmt, $\Psi_\nu(z)$; es gilt $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Psi_\nu(z) = f(z)$. Dann werden die Ab-bildungseigenschaften von $f(z)$ Schritt für Schritt nachgewiesen. Die erwähnte Metrik ruht auf einem beliebigen Paar in \mathfrak{B} eindeutiger und regulärer Funktionen $\Phi(z), \Psi(z)$, für die nur (1) gilt; es wird dann das Skalarprodukt

$$(\Phi, \Psi) = \frac{1}{2i} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\nu} \bar{\Phi} d\Psi$$

zugrunde gelegt, dessen Existenz \mathfrak{T} -nahe liegt.

Egon Ullrich.

● Walsh, J. L.: The location of critical points of analytic and harmonic func-tions. (American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXIV.) New York: American Mathematical Society 1950. IV, 386 p.

Unter kritischen Punkten werden die Kreuzungspunkte oder mehrfachen Stellen analyti-scher Funktionen $f(z)$ verstanden, also die Nullstellen der Ableitung $f'(z)$ — doch werden mehr-fache Pole (bis auf eine Randbemerkung) ausgeschlossen. Das Werk ist dem Studium der Ver-teilung solcher Stellen gewidmet und faßt damit eine große Zahl von Untersuchungen zusammen, die im Anschluß an Sätze von Gauß, Lucas und Jensen entstanden sind. Verf. und seine Schule haben dieses Gebiet seit mehr als drei Jahrzehnten gepflegt und eine Fülle von Einzelergebnissen erzielt. Fast hundert Seiten gelten allein den Polynomen — wobei das Werk dem Buche von Marden, *Geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable* (dies. Zbl. 38, 153) er-gänzend an die Seite tritt. Über 100 Seiten gelten rationalen Funktionen, dann ein relativ kurzer Abschnitt allgemeinen analytischen Funktionen. — Ein zweiter Teil des Buchs ist den kritischen Stellen harmonischer Funktionen gewidmet — darunter werden die Nullstellen des Gradienten-vektors verstanden. Vorweg wird der Sonderfall der Greenschen Funktionen behandelt und Seitenstücke zu den Sätzen von Lucas und Jensen gewonnen. Unter anderen harmonischen Funktionen tritt mehrfach die Diskussion harmonischer Maße für ausgezeichnete Konfigura-tionen hervor. Auch auf diesem Gebiet hat Verf. eine große Zahl eigener Ergebnisse zusammen-fassend dargestellt. — Das Werk bietet eine Fundgrube für Ergebnisse, die namentlich bei der neueren Entwicklung der Funktionentheorie von Interesse sind, in der die Darstellung des Funktionsverlaufs im Großen, durch den Aufbau der von $f(z) = w$ erzeugten Riemannschen Bildfläche \mathfrak{B} belangvoll ist. Indes hat Verf. sich allein auf die Ortung der Nullstellen von $f'(z)$ in der z -Ebene beschränkt, die z. B. durch Konvexitätssätze an die Nullstellen von $f(z)$ gekoppelt werden; natürlich handelt es sich da um weitgehende Verallgemeinerungen des Satzes von Rolle im Reellen.

Egon Ullrich.

Walsh, J. L. and H. G. Russell: On simultaneous interpolation and approxi-mation by functions analytic in a given region. Trans. Amer. math. Soc. 69, 416—439 (1950).

Während Walsh (und seine Mitarbeiter) in den letzten Jahren der Entwick-lung von reinen Approximationsproblemen ihre Aufmerksamkeit gewidmet haben, wird hier eine Verknüpfung von Approximations- mit Interpolationsvorschriften verfolgt. — Sei R ein Gebiet endlichen Zusammenhangs, S Teilmenge (Gebiet) davon, C_1 und C_0 die Ränder von R, S , die in je endlich viele fremde Jordankurven zerfallen können. $\bar{S} = S + C_0 \subset R$ trenne keinen Punkt von $R - \bar{S}$ von C_1 . $\varphi(z) = \omega(z, C_1; R - S)$ sei das zugehörige harmonische Maß, C_ν die Niveaulinie: $\varphi = \nu$, $0 \leq \nu \leq 1$, R_ν das Gebiet von $R - S$, wo $0 < \varphi < \nu$ gilt, erweitert um \bar{S} . — Früher wurden Approximationsvorschriften auf S, C_0 behandelt, bei gegebenem $F(z)$ in etwa R_ϱ , $0 < \varrho < 1$, durch $f(z)$ analytisch und in gewisser Art beschränkt ($< M$, Potenzmittel oder dgl.) im größeren Gebiet R . Jetzt werden zusätzlich Interpolations-vorschriften niedergelegt, etwa: S zerfällt in Jordangebiete, in jedem ein Knoten (z_μ, w_μ) , der von der Näherungsfunktion genau passiert werden soll; dazu $f_M(z)$

$|f(z)| < M$ in R] nähert $F(z)$ an, auf C_0 , im Sinne kleinster p -ter Potenzmittel. Analog für Normierung durch eine Vorschrift über Potenzmittel bei $f(z)$ über C_1 . — Daneben werden auch mehrere Approximationsfragen ohne Interpolation weiter verfolgt, bei denen die Abstände nach Tschebyscheff auf C_0 , nach kleinsten Quadraten in bezug auf C_0 bzw. in S gemessen werden. — Endlich werden komplementäre Probleme besprochen, bei denen es darum geht, bei gegebenem Approximationsmaß m (an C_0 , S) die Funktionen kleinster Norm in R zu ermitteln und die Konvergenzeigenschaften zu verfolgen. Die Existenz solcher Extremfunktionen ist (unter naheliegenden Zusatzannahmen) leicht zu bestätigen. Einzigkeit ist zwar in manchen Fällen zu sichern, tritt aber im Zusammenhang dieser Arbeit zurück. (Vgl. hierzu auch dies. Zbl. 35, 169—171, für schärfere Formulierungen einzelner verwandter Probleme.)

Egon Ulrich.

Fridman, G. A.: Bestimmung des Charakters einer isolierten Singularität einer analytischen Funktion nach den Beträgen der Koeffizienten zweier ihrer Potenzreihenentwicklungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 75, 341—444 (1950) [Russisch].

Es werden isolierte wesentliche Singularitäten s betrachtet, in deren Umgebung die Funktion eindeutig bleibt. Der Singulärteil der zugehörigen Laurententwicklung ist dann eine ganze transzendente Funktion $h(t)$ in $t = (z - s)^{-1}$. Seien ω , τ deren Wachstumsordnung und -typus. Die Klassen $[\varrho, \mu]$ bzw. $[\varrho, \mu]$ umfassen alle ganzen Funktionen mit $\omega < \varrho$ sowie $\omega = \varrho$ und $\tau \leq \mu$, bzw. $\tau < \mu$. Der Charakter einer Singularität (wie oben) wird gekennzeichnet durch das Wachstum der zugeordneten ganzen transzendenten $h(t)$, also z. B. durch Zugehörigkeit zu einer jener Klassen. — In Verallgemeinerung eines bekannten Ergebnisses von Pólya, das indes mehrfach auf verschiedenen Wegen bewiesen wurde, zeigt Verf. etwa:

Erlaubt $f(z)$ zwei Entwicklungen $\sum_0^\infty a_n z^n$ in $|z| < 1$, $\sum_1^\infty b_n z^{-n}$ in $|z| > 1$ und weiß man, daß auf $|z| = 1$ nur endlich viele isolierte wesentliche Irregularitäten liegen, weiß man ferner $|a_n|, |b_n| = O(\exp k n^\sigma)$ mit $0 < \sigma < 1$, so gehören diese Irregularitäten zur Klasse $[\varrho, \mu]$, wobei ϱ, μ einfach und angebbar von σ, k abhängen. Aussagen für den Fall, daß die beiden bekannten Entwicklungen nur in Kreisingen gelten, die längs $|z| = 1$ aneinanderstoßen. — Verallgemeinerungen werden an-

gedeutet, wobei $k n^\sigma$ durch Funktionen $\sigma(n)$ ersetzt werden, die $\int_1^\infty \frac{\sigma(x)}{x^2} dx < \infty$

lassen. — Die Beweise ruhen auf einen Satz von Miss Cartwright, wonach bei Funktionen der Klasse $[1, \pi)$ aus $|F(n)| = O(1)$ schon $|F(x)| = O(1)$ folgt, auf Folgerungen der Phragmén-Lindelöfschen Sätze und auf einen Satz von Gelfond. — Beispiele zeigen, inwiefern die Aussagen scharf sind.

Egon Ulrich.

Inoue, Masao: A note on the minimum modulus of integral functions of lower order $< 1/2$. Math. Japon. 2, 41—47 (1949).

The author considers classes of integral functions having unbounded minimum modulus $m(r)$. A metric study of the intervals where $m(r)$ is large yields theorems of which the following is typical: „Let $f(z)$ be an integral function of at most order ϱ ($0 < \varrho < \infty$), minimal type, and lower order $< \frac{1}{2}$. If $f(z) = O(|z|^k)$, k being a non-negative integer, on a sequence of complex numbers $\{z_n\}$ such that $|z_n|^e = b_n$, $b_1 < b_2 < \dots < b_n < \dots \rightarrow \infty$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_n) < \infty$, then $f(z)$ reduces to a polynomial of at most degree k .“

Bo Kjellberg.

Hällström, Gunnar af: On the study of algebraic functions of automorphism by help of graphs. 10. Skand. Mat. Kongr. København 1946, 97—107 (1947).

Für rationale bzw. gebrochene transzendente Funktionen $f(z)$ wird eine Funktion $S(z)$ als Automorphic- oder S -Funktion bezeichnet, wenn $f(S(z)) = f(z)$ gilt.

Hier interessieren nicht lineare $S(z)$. In einer umfangreichen Arbeit [Acta Acad. Aboensis, Math. Phys. 15, Nr. 6, 1—44 (1946)] hat Verf. das für rationale $f(z)$ untersucht. Hier wird als Hilfsmittel die Streckenkomplexdarstellung der von $f(z)$ erzeugten Riemannschen Fläche herangezogen, um die Gesamtheit der $S(z)$ in einfachen Fällen von $f(z)$ auf ihre den Gruppeneigenschaften nahe kommenden Züge und in bezug auf ihre Vieldeutigkeit zu prüfen. Dabei treten, von einer neuen Seite her, gewisse Riemannsche Flächen ins Blickfeld, die vom Standpunkt von Wertverteilungskonstruktionen schon früher vom Ref., Teichmüller u. a. behandelt worden sind, und es ergeben sich natürliche Verallgemeinerungen. Sind alle S -Funktionen m -wertig, so heiße $f(z)$ m -tel automorph. Die Methode erlaubt es, Aussagen über halbautomorphe Funktionen und ähnliches zu machen und in gewissen Fällen deren Existenz auszuschließen: So gibt es kein drittelaufmorphes Polynom vom Grade > 7 , wohl aber je eine rationale Funktion vom Grade 7 und 13, und es wird ein Beispiel einer drittelaufmorphen, nicht doppelperiodischen Fläche (gebrochene Transzendente) angegeben.

Egon Ullrich.

Nagura, Shohei and Yusaku Komatu: Distortion theorems in the theory of schlicht functions. Nagoya math. J. 1, 25—33 (1950).

Eine einfache Transformation einer von Schaeffer und Spencer [Duke math. J. 12, 107—125 (1945)] angegebenen Differentialgleichung für in $|z| < 1$ schlichte und beschränkte Funktionen $f(z)$ ergibt folgende Differentialgleichung: $\partial f(z, t)/\partial t = -p(f(z, t), t)f(z, t)$ mit der Anfangsbedingung $f(z, 0) = z$; hier bedeutet $p(w, t)$ eine für jedes t regulär-analytische Funktion von w mit positiven Realteil. Ähnlich wie aus der Löwnerschen Differentialgleichung lassen sich aus jener bekannte Verzerrungssätze, sowie der Bieberbachsche Drehungssatz mit den scharfen Schranken herleiten [vgl. z. B. G. M. Goluzin, Math. Sbornik, n. Ser. 1 (43), 293—296 (1936); I. Bazilevič, ebenda, 283—292; dies. Zbl. 15, 71]. Die Methode wird schließlich auf Abbildungen von Kreisringgebieten ausgedehnt, bei denen der eine Kreis in sich übergeht, und zur Abschätzung von $|F(z)|$ benutzt.

Helmut Grunsky.

Schaeffer, A. C. and D. C. Spencer: Models illustrating the third coefficient region for schlicht functions. Scripta math. 16, 67—71 (1950).

Beschreibung durch elementare Formeln und Modelle für den Koeffizientenbereich (a_2, a_3) der schlichten Funktionen im Einheitskreis.

Egon Ullrich.

Bermant, A.: On certain generalizations of E. Lindelöf's principle and their applications. Mat. Sbornik, n. Ser. 20, 55—106 und englische Zusammenfassg. 106—112 (1947) [Russisch].

Die Verallgemeinerungen beziehen sich auf das Lindelöfsche Prinzip, das unter dem Stichwort „subordinierte Funktionen“ weite Anwendungen gefunden hat; sie vermeiden (jedenfalls explizit) aber die Richtung, welche ihren Höhepunkt in der Theorie vom harmonischen Maß gefunden hat; so ergeben sich Sätze von einer gewissen Mittelstellung zwischen den qualitativen und schärfst quantitativen Aussagen. — Die umfangreiche Arbeit enthält eine Reihe sehr schöner Beiträge zur neuesten Funktionentheorie, von denen wir nur einige wenige hervorheben können. — Verf. geht von Fortführungen des Schwarzschen Lemmas aus, in dessen klassischer Formulierung er den Maximalbetrag

$$\max_{|z| \leq r} |w(z)| \text{ ersetzt durch } L_r(w) = \frac{1}{2\pi} \int \ln |w(z)| d \arg w(z),$$

wo das Integral in positiver Richtung über das w -Bild von $|z| = r$ erstreckt ist. Ist diese Abbildung sternig, so wird $L_r^*(w)$ geschrieben. $L_r(w/r)$ bzw. $L_r^*(w/r)$ werden als Logarithmische Verzerrung (bzw. Log. Stern-Verzerrung) angesprochen. Diese (auf E. Schmidt zurückgehenden und in der Dissertation von H. Grunsky 1932 schon näher studierten) Hilfsmittel erlauben es, nach Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas dem sog. Koebeschen Viertel-Satz neue Seiten abzugewinnen. So ist der Radius ω des größten Kreises um den w -Ursprung, den eine in $|z| < 1$ schlichte Funktion $w(z) = z + \dots$ überdeckt, in folgender Weise zu schätzen:

$$\omega \geq \frac{1}{4} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int \ln \left(1 + \frac{1}{4\varrho} \right) d\vartheta \right\} \quad \text{bei } w = \varrho e^{i\vartheta}$$

und λ gleich Bildrand; oder

$$\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\exp L_1(w)} \leq 4, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega_m} \leq 4,$$

wo $\pi \omega_m^*$ = Flächeninhalt des Bildes, ω_m also dessen mittlerer Radius. Unter der Annahme endlich, daß das Bild eine Menge E nicht überdeckt, welche um einen Halbstrahl ϑ_0 symmetrisch liegt und deren Komplement ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit 0, aber ohne ∞ ist, muß das Bild das Segment $0, K_1(E)$ auf $\arg w = \vartheta_0$ überdecken, wo $K_1(E) \geq \frac{1}{4}$ ist und nur von E abhängt. — Verallgemeinerung solcher Schätzungen im Sinne von Szegő, derart, daß analoge Aussagen über die Länge von n Segmenten, symmetrisch von $w = 0$ ausgehend, gemacht werden. — Jede in $|z| < 1$ reguläre Funktion $w(z) = 0 + a_1 z + \dots$ hat eine Log. Sternverzerrung $L_1^*(w/r)$, die mit r monoton wächst; nur bei $w = a_1 z$ ist sie gleich $\ln |a_1|$. Daraus als Fortführung des Schwarzschen Lemmas: Aus $L_1^*(w) \leq 0$ folgt $L_1^*(w) \leq \ln r$ für $0 < r < 1$ und $|w'(0)| \leq 1$; Gleichheit nur bei Drehungen. Im Anschluß daran eine Reihe von Schätzungen, welche sich auf den Vergleich Riemannscher Bildflächen stützen. — Eine interessante Bemerkung bezieht sich darauf, daß die formalen Verzerrungsformeln ($|z| = r$)

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |w(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \quad \frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |w'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

gar nicht an die schlichte Abbildung als solche gebunden sind. Sie gelten vielmehr schon für jeden Durchmesser des Einheitskreises derart, daß die Wertvorräte von $w(z)$ in den beiden zugehörigen offenen Halbkreisen fremd sind! Bei schlichter Abbildung gelten sie danach für alle Durchmesser. — Der letzte Abschnitt behandelt Funktionen $w(z) = z + \dots$, deren Bildfläche in einem gewissen Teil einen Kreis $|w| < \gamma$ höchstens mit p Blättern überdeckt, ohne einen Punkt dieser Scheibe unbedeckt zu lassen. Ist $w(z)$ in $|z| < 1$ beschränkt $\leq M$ und zudem von dieser Eigenschaft, so gibt es zu jedem $p = 1, 2, \dots, \infty$ eine genau angebbare Konstante τ_p derart, daß mindestens $|w| < \gamma_p$, $\gamma_p \geq \tau_p M$ in dieser Art überdeckt wird. $p = 1, \infty$ sind bekannte Sonderfälle. Ferner erlaubt dieser Satz, Aussagen von Dieudonné'schen p -wertigen Funktionen neu zu begründen und in verschiedener Art zu ergänzen bzw. auf verwandte Fälle zu übertragen.

Egon Ullrich.

Robertson, M. S.: Applications of a lemma of Fejér to typically-real functions. Proc. Amer. math. Soc. 1, 555—561 (1950).

Wir setzen $w = \mathfrak{U}(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, $a_1 = 1$, konvergent in $|z| < 1$; analog für andre Potenzreihen $\mathfrak{B}(z)$ usw. $\mathfrak{U}(z)$ heißt typisch-reell für $|z| < R$ (≤ 1), wenn dort $\text{sign } \Im \mathfrak{U}(z) = \text{sign } \Im z$ gilt. $\mathfrak{U}(z)$ heißt konvex in der imaginären Richtung, wenn jeder Kreis $|z| = r < R$ eine Bildkurve liefert, die von Parallelen zur v -Achse höchstens in zwei Punkten geschnitten wird. — Seien $\mathfrak{U}(z)$, $\mathfrak{B}(z)$ typisch reell für $|z| < 1$; es werde die zugeordnete Potenzreihe $\mathfrak{C}(z)$ studiert mit $c_n = a_n b_n$. Sie ist typisch reell für $|z| \leq 2 - \sqrt{3}$ (und diese Schranke ist genau; Beispiel $\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{B} \equiv z(1-z)^{-2}$, $\mathfrak{C} \equiv (z+z^2)(1-z)^{-3}$); $\Re \mathfrak{C}(r e^{i\vartheta}) \geq 0$ für $|\vartheta| \leq \arccos \mu(r) < \pi/2$, $0 < r < 1$, $4r\mu(r) \equiv (1+34r^2+r^4)^{\frac{1}{2}} - 1 - r^2$ (scharf); $h(z) = \int_0^z \mathfrak{C}(t) d \log t =$

$\sum_1^\infty a_n b_n n^{-1} z^n$ ist regulär und typisch reell in $|z| < 1$. Sind aber \mathfrak{U} , \mathfrak{B} regulär schlicht und konvex in imaginärer Richtung für $|z| < 1$, so auch \mathfrak{C} . Setzt man $\mathfrak{B} = z(1-z)^{-1} = z + z^2 + \dots$, so folgt nach Egerváry (dies. Zbl. 15, 305) ein Satz von Fejér, daß nämlich die Cesàromittel aller Ordnungen ≥ 3 für eine jede Reihe \mathfrak{U} obiger Art jene Eigenschaften zeigen. — Alle diese Aussagen können aus dem Lemma von Fejér geholt werden: konvergiert $\sum_1^\infty \lambda_n r^n$ für ein r aus $0 < r < 1$, so ist notwendig und hinreichend für $\sum_1^\infty \lambda_n r^n \sin nx \sin ny \geq 0$ für $0 < x, y < \pi$, daß $\sum n \lambda_n r^n \sin ny \geq 0$ gilt für $0 < y < \pi$.

Egon Ullrich.

Goluzin, G. M.: Über typisch reelle Funktionen. Mat. Sbornik, n. Ser. 27 (69), 201—218 (1950) [Russisch].

Die Arbeit untersucht die Klasse T_r der in $|z| < 1$ typisch-reellen Funktionen (wie im vorsteh. Referat), und die Unterklasse S_r der zudem schlichten Funktionen. Das geschieht einmal im Hinblick auf das Koeffizientenproblem; im m -dimensio-

nalen euklidischen Raum R_m mit den (reellen) Koordinaten a_2, \dots, a_{m+1} entsprechen den Klassen T_r, S_r gewisse Punktmengen $T_r^{(m)}, S_r^{(m)}$; da mit f_1, f_2 auch $\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2 \in T_r$, ist $T_r^{(m)}$ konvex; und es ist konvexe Hülle von $S_r^{(m)}$; dies ist wirklich enger für $m \geq 2$ (Beispiel). Andererseits werden Schätzungen und Extremalaussagen für $f \in T_r$ in bezug auf

$$|f(z)|, |f'(z)|, |\Im f(z)|, \arg f(z), \sup_{|z|=r} |\Im f(z)|, \arg f'(z)$$

gegeben. Die Extremalfunktionen sind von der Form $s(z; a) = z : (1 - 2a z + z^2)$, $-1 \leq a \leq 1$, teils sogar $a = \pm 1$; die genauen Schranken für die Klasse T_r werden dann von Funktionen in S_r erreicht! Zuletzt eine Koeffizientenschätzung für ungerade Funktionen aus S_r .

Egon Ullrich.

Parreau, Michel: Sur les moyennes des fonctions harmoniques et la classification des surfaces de Riemann. C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 679—681 (1950).

Verallgemeinerung des Satzes (vgl. R. Nevanlinna, dies. Zbl. **36**, 191) über Konvexität eines Mittelwertes $m(\lambda)$ auf Konvexität von

$$(*) \quad m_\alpha(\lambda; u) = \left(\int_{x=\lambda} |u|^\alpha dy \right)^{1/\alpha} \quad \text{für } 0 \leq \lambda \leq \lambda_1,$$

wenn u harmonisch auf \bar{G} , G relativ kompaktes Gebiet einer Riemannschen Fläche S ist, das von endlichvielen analytischen Kurven berandet ist; diese zerfallen in γ_0, γ_1 ; x sei die positive harmonische Funktion in G , die auf γ_0 verschwindet, auf γ_1 gleich der konstanten λ_1 ist und für die $\int_{\gamma_0} \frac{\partial x}{\partial n} ds = \int_{\gamma_1} dy = 1$, ist. n = innere Normale,

y konjugiert harmonisch zu x . — Diskussion der Grenzfälle: $m_\alpha(\lambda; u)$ linear nur für u linear in x . Ist auch $u = 0$ auf γ_0 , $\int_{\gamma_0} \left| \frac{\partial x}{\partial n} \right| ds = 1$, so ist $m_\alpha(\lambda; u) \geq \lambda$

mit Gleichheit nur für $u = \pm x$. — Erweiterung für subharmonische $u > 0$ auf S . Notwendig und hinreichend dafür, daß u beschränkte α -Mittel auf S habe, ist, daß es dort eine harmonische Majorante gestatte. Anwendung zur Klassifikation Riemannscher Flächen im Anschluß an die Terminologie bei Sario [11. Skand. Mat. Kongr. Trondheim 1949 (1950)]. Eigenschaft M_α einer eindeutigen harmonischen Funktion u auf S besagt, daß $|u|^\alpha$ eine endliche harmonische Majorante auf S besitze ($\alpha \geq 1$). Aus M_α folgt M_β für $1 \leq \beta \leq \alpha$. Funktion mit beschränktem Dirichletintegral auf S hat M_2 . — C_{HM_α} ist die Flächenklasse auf der für harmonisches u aus $u \in M_\alpha$ folgt $u \equiv \text{const.}$ C_0 die Klasse von S , wo die Konstanten die einzigen positiven harmonischen Funktionen sind. Mehrere Aussagen und Fragen dazu.

Egon Ullrich.

Parreau, Michel: Sur certaines classes de fonctions analytiques uniformes sur les surfaces de Riemann. C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 751 — 753 (1950).

Analog zu der Mittelbildung (*), im vorsteh. Referat, über harmonische Funktionen werden solche über analytische Funktionen betrachtet, und entsprechende Einteilungen Riemannscher Flächen studiert; dabei kann ein von R. Nevanlinna schon erwarteter Sachverhalt bestätigt werden: $P_{AB} \subset P_{AD}$. Andererseits werden die Größen T, m, N der Wertverteilungslehre unmittelbar auf gewisse Riemannsche Flächen anwendbar gemacht, diejenigen nämlich, welche eine Greensche Funktion besitzen, deren sämtliche Niveaueurven kompakt sind. Der Satz von Frostman läßt sich rasch übertragen: Zur unbeschränkten Charakteristik T ist die Menge der defekten Werte von (innerer) Kapazität 0. Erweiterungen.

Egon Ullrich.

Le-Van, Thiem: Über das Umkehrproblem der Wertverteilungslehre. Commentarii math. Helvet. **23**, 26—49 (1949).

Le-Van, Thiem: Sur un problème d'inversion dans la théorie des fonctions méromorphes. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. **67**, 51—98 (1950).

Beide Arbeiten behandeln das Problem, gebrochene Transzendenten herzustellen, deren Wertverteilung im Sinne einer genau erfüllten Defektrelation vorgeschrieben ist. Für endlich viele Stellensorten $a_\kappa (\kappa = 1, \dots, q)$ werden Defekte $\delta_\kappa = \delta(a_\kappa)$ und Indizes der algebraischen Verzweigkeit $\varepsilon_\kappa = \varepsilon(a_\kappa)$ vorgegeben, unter den Nebenbedingungen: $\delta_\kappa, \varepsilon_\kappa$ seien rational, $\delta_\kappa + \varepsilon_\kappa \leq 1$ bzw. < 1 falls $\varepsilon_\kappa > 0$ ist, mindestens ein $\delta_\kappa > 0$, und die Defektrelation der Nevanlinnaschen Wertverteilungstheorie sei scharf erfüllt, d. h. $\sum \delta_\kappa + \sum \varepsilon_\kappa = 2$. — Die Konstruktion erfolgt auf dem vom Ref. vorgeschlagenen Wege über Riemannsche Flächen, welche nur über den a_κ verzweigt sind, und endlich viele, etwa p , logarithmische Windungspunkte haben, die in der Streckenkomplexdarstellung durch ebenso viele, voneinander unabhängig gewählte periodische Enden getrennt werden (dies. Zbl. 13, 271). Jedes solche Ende kann als die Hälfte einer von einer einfach periodischen Funktion $R_\pi(e^z)$ erzeugten Riemannschen Fläche gedeutet werden; $R_\pi(u)$ sind rationale Funktionen, die passend einzurichten sind ($\pi = 1, \dots, p$). Diese Flächenklasse verallgemeinert in natürlicher Weise Nevanlinnas Flächen mit endlichvielen, nur logarithmischen Windungspunkten, die durch unverzweigte Flächenstücke (logarithmische Enden) getrennt werden. Bei periodischen Enden kann es eintreten, daß die beiden Ufer im Streckenkomplex verschiedene Periodenlängen $2d_\pi^+$, $2d_\pi^-$ zeigen, und zwar dann, wenn $u = 0, \infty$ für die rationale Funktion $R_\pi(u)$ (Kreuzungs-) Punkte verschiedener Vielfachheit (Blattzahl) d_π^+ , d_π^- sind. Als positives Ufer eines Endes werde etwa dasjenige bezeichnet, welches man bei positivem Umlauf um $w = 0$ längs eines großen Kreises zuerst trifft. Dieser Umstand erweist sich als besonders wichtig. — Es handelt sich dann darum, eine Fläche \mathfrak{B} aus dieser Klasse schlicht und konform abzubilden; sie ist stets vom parabolischen Typus, wird also umgekehrt durch eine gebrochene Transzendente $w = w(z)$ erzeugt. Die konforme Abbildung kann — unter wesentlicher Vereinfachung — durch quasikonforme Abbildungen genügend genau approximiert werden, so daß es möglich wird, Wachstumsordnung und Wertverteilungsgrößen überhaupt genügend genau zu übersehen. Die quasikonforme Abbildung setzt daran an, daß jedes einzelne periodische Ende schon konform durch die Umkehrfunktion von $R_\pi(e^z)$ auf eine Fast-Halbebene H_π^* abgebildet werden kann, die dann in eine Halbebene H_π quasikonform, unter Erhaltung der Asymptotik, übergeführt wird. Diese Halbebenen können in der Umlaufreihenfolge der periodischen Enden aneinandergeschlossen werden, wobei aber die Ufer der ersten und letzten u. U. verschiedene Asymptotik zeigen: Erst nach einer Hilfsabbildung durch eine allgemeine Potenz (als multiplikative Funktion) passen sie aneinander und bilden die Fläche, abgesehen von einem endlichen Kernstück, in das Äußere eines Kreises ab, etwa $1 < |w| < \infty$. — Es kommt dabei auf die Kennzahl Δ der Riemannschen Fläche an, welche aus den oben erwähnten Periodenlängen der Ufer entsteht:

$$\Delta = \left| \log \frac{d_1^+ \cdots d_p^+}{d_1^- \cdots d_p^-} \right|$$

Nur für $\Delta = 0$ ist die letzte Potenzabbildung entbehrlich. Tritt sie aber auf, für $\Delta \neq 0$, so erhält man spiralförmige Wertverteilung mit Wachstumssteigerung gegenüber der unteren Schranke der Wachstumsordnung, welche nach dem Satz von Denjoy-Carleman-Ahlfors mindestens gleich $p/2$ sein muß. Die Wachstumsordnung der Erzeugenden $w(z)$ ergibt sich als

$$\omega = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, w)}{\log r} = \frac{p}{2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{p^2 \pi^2} \right);$$

es liegt stets der Normaltypus vor; für $\Delta = 0$ ist das Wachstum regelmäÙig. — Es ist nun möglich, im Falle verschwindender Kennzahl $\Delta = 0$, diese Abbildung soweit zu beherrschen, daß Defekte und Indizes berechnet werden können; sie sind jedenfalls rational. Die gewonnenen Formeln erlauben einzusehen, daß das Umkehrproblem in dem eingangs genannten (ziemlich weit reichenden) Sonderfall schon innerhalb der Flächenklasse mit $\Delta = 0$ gelöst werden kann, wobei es sogar genügt, jedes einzelne periodische Ende nur an drei Verzweigungsarten a_κ zu beteiligen, während es in den übrigen Sorten schlichte Blätter zeigt. — Verf. entwickelt ein Verfahren, aus dem vorgeschriebenen Defekt-Indexschema $(a_\kappa, \delta_\kappa, \varepsilon_\kappa)$ mit $\kappa = 1, \dots, q$ durch Zurückführung auf einfachere Sonderschemen in jedem Einzelfall zur Konstruktion geeigneter Streckenkomplexe mit endlich vielen periodischen Enden vorzudringen und damit die Existenz meromorpher Funktionen mit der vorgeschriebenen Wertverteilung nachzuweisen. — Falls die Defekte alle verschwinden, kann man (bekanntlich) mit elliptischen Funktionen zu Rande kommen — von der Ordnung 2. Das dürfte indes auch mit den Funktionen der Ordnung 0 gelingen, die durch Halbieren eines doppeltperiodischen Komplexes entstehen, wenn man den dabei zustande kommenden einzigen logarithmischen Windungspunkt beseitigt — wie das vom Ref. schon 1936 in einem typischen Sonderfall angegeben worden ist (dies. Zbl. 16, 34; 21, 238). — Die französische Arbeit des Verf. stellt die Dinge im ganzen breiter dar, und ergänzt sie durch interessante Hinweise über die Auswirkungen der Asymmetrie in der Riemannschen Fläche, die er mit Ergebnissen von Ch. Blanc (dies. Zbl. 17, 120) in Zusammenhang bringt: Ersetzt man etwa in Flächen mit periodischen Enden, die nur in je einer Sorte algebraische Windungspunkte 1. Ordnung zeigen, alle diesen zugeordnete Quadrate im Streckenkomplex durch logarithmische Elementargebiete, so erhält man jedenfalls Flächen, die von Funktionen $w(z)$ der Wachstumsordnung ∞ erzeugt

werden — sofern sie wie im symmetrischen Falle überhaupt vom parabolischen Typus sind. Im (stark) asymmetrischen Falle ergibt sich indes der hyperbolische Typus. — Der Gegenstand ist indes in einer Karlsruher Dissertation unter etwas anderen Gesichtspunkten behandelt (Klaus Pöschl, dies. Zbl. 42, 86) und in einer (Gießener Dissertation wesentlich weitergeführt worden. Aus den periodischen Enden heraus wurden durch Verschiebung der algebraischen Windungspunkte Verschmelzungen der anstoßenden logarithmischen Windungspunkte zu unmittelbaren Randstellen 2. Art erzielt; auch dann kann in gewissen Fällen Wachstumsordnung und Wertverteilung beherrscht werden, eine Senkung der Wachstumsordnung gegenüber der Denjoy-Carleman-Ahlfors'schen Schranke von der Ausgangsfläche auf die Endfläche wird bestätigt; darunter fällt die klassische Gammafunktion. Endlich konnte so das Umkehrproblem für abzählbare viele positive Indizes ε_k erstmalig gelöst werden. Vgl. F. Huckemann, Mitt. Math. Sem. Gießen 42 (1951/52).

Egon Ullrich.

Wittich, Hans: Über den Einfluß algebraischer Windungspunkte auf die Wachstumsordnung. Math. Ann. 122, 37—46 (1950).

Es werden einige Riemannsche Flächen durch Streckenkomplexe aufgebaut und behandelt, deren Verzweigungspunkte drei Sorten angehören; eine davon enthält einen logarithmischen Windungspunkt, die beiden andren nur algebraische Windungspunkte, in einer Sorte von fester, in der andren von wachsender Blattzahl. Solche Flächen sind vom Ref. zur Konstruktion des Index der algebraischen Verzweigkeit $\varepsilon = 1$. und auch von Valirondefekten vorgeschlagen worden. Verf. zeigt auf neuem Wege: den parabolischen Typus und die Beherrschbarkeit der Asymptotik der erzeugenden Funktion bis zur Errechnung der Wertverteilungsgrößen. Bei stark wachsender Blattzahl der algebraischen Windungspunkte in der 3. Sorte könnte eine Erhöhung der Wachstumsordnung über den notwendigen Mindestwert $\frac{1}{2}$ in Betracht kommen. — Einige verwandte Fragen werden erörtert. Egon Ullrich.

Gachov, F. D.: Über das Riemannsche Randwertproblem für ein System von n Funktionenpaaren mit unstetigen Koeffizienten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 73, 261—264 (1950) [Russisch].

Die im Titel genannte Aufgabe ist erstmalig von Hilbert in Angriff genommen worden (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math. phys. Kl. 1905, 307—338). Die Methoden der Lösung haben sich bei späteren Autoren vereinfacht. Verf. gibt eine besonders einfache Lösung, die sich durch weitgehenden Gebrauch der Funktionentheorie der Matrizen auszeichnet. Gegeben ist eine genügend glatte geschlossene Kurve L , die ein inneres Gebiet S^+ und ein äußeres S^- in der komplexen Zahlenebene begrenzt. Gesucht wird ein System von n holomorphen Funktionenpaaren, zusammengefaßt zu zwei Vektorfunktionen $f^+(z)$ und $f^-(z)$, die auf L der Randbedingung genügen: $f^+(t) = C(t) f^-(t)$ mit gegebener Matrix $C(t)$. Mit Magnaradze (dies. Zbl. 36, 334) wird in Verallgemeinerung der sonst gebräuchlichen Lipschitz-Hölder-Bedingung angenommen, daß $C(t)$ der Bedingung genügt: $|C(t_2) - C(t_1)| < A/[\lg(t_2 - t_1)]^{p+1}$, $p > 0$, mit Ausnahme von m Unstetigkeitsstellen erster Art t_1, \dots, t_m auf L , wo $C(t_k - 0) \neq C(t_k + 0)$ für $k = 1, \dots, m$ ist. — Durch Einführung neuer Vektorfunktionen vermöge $f^+(z) = C(t_1 + 0)(z - t_1)^\lambda f_1^+(z)$ und $f^-(z) = (z - t_1)^\lambda f_1^-(z)$ mit $\lambda = \frac{1}{2\pi i} \lg [C^{-1}(t_1 + 0) C(t_1 - 0)]$ wird zunächst im Falle eines Unstetigkeitspunktes t_1 und anschließend im allgemeinen Fall die Aufgabe vermittelt der erwähnten Methode auf die gleiche Aufgabe, aber mit stetigen Koeffizienten bei einer analogen Randbedingung, zurückgeführt und damit gelöst.

Erik Svenson.

Vekua, N. P.: Über eine Randwertaufgabe der Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze 17, 41—46 (1949) [Russisch].

Es handelt sich um eine Randwertaufgabe des folgenden Typus:

$$\varphi_k^+(\alpha_k(t)) = \sum_{v=1}^n G_{kv}(t) \varphi_v^-(t) + g_k(t) \quad (k = 1, \dots, n)$$

G, g, α sind gegeben, das System φ_k gesucht. Determinante $|G_{kv}| \neq 0$ überall auf $t \in L$. — L ein System von Konturen, kurz Rand eines (evtl.) mehrfach zusammenhängenden Gebiets D^+ ; D^- das Komplement von $D^+ + L$. Die $\alpha_k(t)$ ($k = 1, \dots, n$) bilden jede der Komponenten von L auf sich ab, $\alpha'_k(t) \neq 0$; Hölder-Bedingungen für Tangentenwinkel bei L und die α'_k . Die φ sollen „stückweise regulär“ sein, d. h. regulär in jedem Gebiet, das keinen Punkt von L enthält, und sie sollen bei Annäherung aus D^- , D^+ an L Randwerte φ^+ , φ^- gestatten. (Vgl. auch dies. Zbl. 39, 326 und das zweitfolgende Referat.)

Egon Ullrich.

Gachov, F. D.: Ein Fall der Riemannschen Randwertaufgabe für ein System von n Funktionenpaaren. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 14, 549—568 (1950) [Russisch].

Es handelt sich um die verallgemeinerte Riemannsche Randwertaufgabe vom Typus

$$\varphi_v^+(t) = \sum_{\mu=1}^n a_{v\mu}(t) \varphi_{\mu}^-(t) + b_v(t) \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

die wie folgt zu verstehen ist: Es sei S^+ ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet mit n einfachen, glatten Randkurven C_n , $C = \sum_1^n C_n$; S^- deute das Äußere von S^+ an, bzw. die Gesamtheit der Komponenten, deren eine $z = \infty$ enthalte, während $z = 0$ in S^+ liege. Für t auf den C_n

seien die Koeffizienten $a_{v\mu}(t)$ sowie die $b_v(t)$ gegeben (mit Hölderbedingungen) und zur Matrix $A(t)$ bzw. dem Vektor $b(t)$ zusammengefaßt; die Determinante $|A(t)|$ sei $\neq 0$. — Gesucht wird ein System von Funktionenpaaren, analytisch bzw. in S^+ , S^- , deren Randwerte, aus diesen Gebieten herausgebildet, $\varphi_v^+(t)$, $\varphi_v^-(t)$ dem obigen System genügen. Nach Muschelišvili spricht man von einem stückweise analytischen Vektor Φ mit den Komponenten $\varphi_v^+(z)$ in D^+ , $\varphi_v^-(z)$ in D^- . Das System lautet $\Phi^+(t) = A(t) \Phi^-(t) + b(t)$ in Matrixschreibweise. Diese Aufgabe hat seit einem Jahrhundert viele Bemerkungen vor allem der grusinischen Mathematiker auf sich gezogen. — Hier wird die Koeffizientenmatrix von besonderer Natur angenommen, derart, daß sie zerfallbar sei in ein Produkt

$$A(t) = \Omega^+(t) \cdot U(t) = \|\omega_{v\kappa}^+(t)\| \cdot \|u_{\kappa\mu}(t)\|;$$

die Elemente $\omega_{v\kappa}^+(t)$ sollen als Randwerte analytischer Funktionen in S^+ erscheinen, und die $u_{\kappa\mu}(t)$ analog für S^- , bis auf Pole in ∞ . Für die Matrizen $\Omega^+(z)$ in S^+ , $U(z)$ in S^- wird durch Abspalten der Nullstellen der zugeordneten Determinanten eine kanonische Form erzielt, die sich in Matrizen mit in den S^\pm nichtverschwindenden Determinanten und in „Polynom“-matrizen auf Grund der Nullstellen aufspaltet; das gelingt durch eine Abbildung ähnlich wie bei der Basiskonstruktion bei algebraischen Funktionen. — Es wird dann möglich, eine Lösung des kanonischen Systems und daraus die allgemeine Lösung zu gewinnen. Die Rolle des Verhaltens der Elementarteiler der Matrix in $z = \infty$ wird gezeigt und der singuläre Fall näher untersucht, wo die Determinante der Koeffizientenmatrix auf einer Kontur verschwindet. *Egon Ullrich.*

Gachov, F. D.: Über singuläre Fälle der Riemannschen Randwertaufgabe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 705—708 (1951) [Russisch].

Es handelt sich um einige singuläre Fälle in Ergänzung der vorsteh. referierten Arbeit. Insbesondere wird der Frage Aufmerksamkeit gewidmet, wie die Zahl der linear unabhängigen Lösungen bzw. der Lösbarkeitsbedingungen mit dem Vorhandensein von Nullstellen der Determinante $|A(t)|$ bzw. von „Polen“ der Matrixelemente $a_{v\kappa}$ zusammenhängt (die aber nicht analytisch zu sein brauchen): Eine solche Abhängigkeit vom Vorhandensein von Nullstellen kann ausgeschlossen werden, während Pole jene Anzahlen senken; dazu können nähere Angaben angegeben werden. *Egon Ullrich.*

Karcivadze, I. N. und B. V. Chvedelidze: Über eine Umkehrformel. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 10, 587—591 (1949) [Russisch].

Seien C_k einfache, geschlossene, glatte Kurven, zu je zweien im Äußeren voneinander gelegen; für eine jede von ihnen sei $t = t(s)$ Parameterdarstellung aus der Bogenlänge $0 \leq s \leq l_k$; keine der Kurven trage einen Häufungspunkt einer Punktfolge aus ∞ vielen der C_k . Es sei $C = \sum_1^\infty C_k$ gesetzt. I_p bezeichne die Klasse aller Funktionen $\varphi(t)$, die auf C_k erklärt sind und der Bedingung genügen

$$\int_0^{l_k} \frac{\omega(\tau; \varphi)}{\tau} \left(\log \frac{l_k}{\tau} \right)^p d\tau < \infty \quad \text{bei} \quad \omega(\tau, \varphi) = \sup_{|t_2 - t_1| \leq \tau \leq l_k} |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|.$$

[Hierzu für eine oder endlich viele C_k Arbeiten von Magnaradze, z. B. dies. Zbl. 36, 334.] Es sei $I_\infty = \prod_{p \geq 0}^\infty I_p$. Es sei $\varphi(t)$ zur Klasse A genommen, wenn es 1. auf jedem C_k ($k = 1, 2, \dots$) zu I_∞ gehört, wenn 2. die Reihe

$$\oint_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - t} = \sum_{k=1}^\infty \oint_{C_k} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - t} = f(t) \cdot \pi i$$

auf jedem C_k gleichmäßig konvergiert, 3. deren Summe $f(t)$ wieder 1. erfüllt. Für diese Funktionenklasse A wird eine Anzahl von Sätzen übertragen, welche von grusinischen Mathematikern im Falle endlich vieler C_k festgestellt sind. Wir heben etwa die Umkehrformel hervor:

$$\frac{1}{\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - t} = f(t), \quad \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - t} = \varphi(t)$$

die eine Abbildung der Klasse A auf sich selbst zeigt. Eine Verallgemeinerung auf Klassenpaare wird angedeutet.

Egon Ullrich.

Markušević, A. I.: Einige Fragen der Theorie der Randeigenschaften analytischer Funktionen. Uspechi mat. Nauk 4, Nr. 4 (32), 3—18 (1949) [Russisch].

Nach einem einleitenden Überblick über die Natur des Randwertproblems bei analytischen Funktionen im Einheitskreis und seine Anfänge mit Fatou und den Brüdern Riesz werden neuere Ergebnisse für die Klasse B der beschränkten und die Klasse N der beschränktartigen Funktionen $[T(r, f) = O(1)]$, ergänzt durch die Einschaltung der Klassen H_δ , systematisch dargestellt, geordnet und auf offene Fragen hingewiesen. — H_δ ist die Klasse der Funktionen $f(z)$ mit beschränkten Potenzmitteln in $|z| < 1$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\delta \alpha \theta < \infty.$$

Die Klassenanordnung ist $B \subset H_\delta \subset H_A \subset N$ für $0 < \delta < A < \infty$. H_2 ist durch Konvergenz von $\Sigma |a_n|^2$ (zur Taylorreihe) gekennzeichnet und wohlbekannt, H_1 fällt mit der Klasse der Funktionen zusammen, die aus ihren Randwerten durch Cauchy- bzw. Poissonintegrale dargestellt werden (Fichtengol'c). Neben älteren, wenn auch nicht immer genügend bekannten Ergebnissen (Golubev, Lusin, Privalov, Smirnov) heben wir einen Satz von Vostrecov hervor, wonach es zu jeder in $|z| < 1$ konvergenten Taylorreihe $\Sigma a_n z^n$ eine Majorante $\Sigma A_n z^n$ gibt, $|A_n| > |a_n|$, die für eine Menge $\zeta = e^{i\theta}$ vom Maß 2π Randwerte im Winkel anstrebt. Das zeigt, daß die Existenz von Randwerten an keine Bedingung geknüpft sein kann, die sich allein auf die Beträge der Taylorkoeffizienten bezieht. Wir heben ferner als quantitative Verschärfung eines Satzes von Pólya-Hurwitz hervor: Streut man in $\Sigma a_n z^n$ Vorzeichen ein, $\varepsilon_n = \pm 1$, so haben „fast alle“ Potenzreihen $\Sigma \varepsilon_n a_n z^n$ die Eigenschaft: Auf keiner θ -Menge von positivem Maß existieren radiale Zielwerte; „fast alle“ wird durch Zuordnung der ε_n -Folge zu Dualbrüchen gemessen. Die Zugehörigkeit zu H_δ wird mit Konvergenzaussagen über $\Sigma |a_n|^{\delta/(\delta-1)}$ verknüpft: Für $f \in H_\delta$ und $1 < \delta \leq 2$ konvergiert diese Reihe; bei Konvergenz für $2 \leq \delta$ folgt $f \in H_\delta$. Fridman bewies für $f \in H_\delta$ mit $\delta < 1$ die Koeffizientenschätzung $a_n = o(n^{(1-\delta)/\delta})$, die nicht wesentlich verbessert werden kann. Davidov zeigte, daß man jede Folge komplexer Zahlen als Teilfolge der Taylorkoeffizienten eines $f \in H_\delta$ für beliebiges $\delta < 1$ auffassen kann: Diese Koeffizienten können also die komplexe Ebene dicht erfüllen! — Unter offenen Problemen wird besonders die Kennzeichnung der Funktion $\varphi(e^{i\theta})$ als erwünscht bezeichnet, welche von den Randwerten einer in $|z| < 1$ analytischen Funktion $f(z)$ erzeugt wird, sowie die Konstruktion einer analytischen Funktion aus gegebenen Randwerten (über den Fall H_1 hinaus; siehe oben). Dazu werden einige bemerkenswerte Beobachtungen zusammengestellt. — In seiner interessanten Übersicht hat Verf. sich fast allein auf russische Arbeiten bezogen und ist manchmal an Veröffentlichungen anderer Mathematiker leider ohne Zitat vorübergegangen, auch wenn er sie wesentlich benutzt. Freilich strebt er vor allem an, Ergebnisse seines Moskauer funktionentheoretischen Seminars darzustellen und einzuordnen.

Egon Ullrich.

Alenicyn, Ju. E.: Über im Mittel p -wertige Funktionen. Mat. Sbornik, n. Ser. 27 (69), 285—296 (1950) [Russisch].

Es sei $F(\zeta) = \zeta^x \{1 + \alpha_1 \zeta^{-1} + \dots\}$ regulär für $1 < |\zeta| < \infty$, und W die davon erzeugte Riemannsche Fläche. Diese wird „ausgelotet“ in bezug auf p -Blättrigkeit im Mittel, indem für einen beliebigen Punkt a der Inhalt $W(a; r, R)$ des Flächenstücks untersucht wird, welches den Kreis(ring) $0 \leq r \leq |w - a| \leq R < \infty$ überdeckt. In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 36, 189) untersuchte Verf. zwei Funktionenklassen, die durch das Bestehen der Ungleichungen gekennzeichnet sind:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n W(a; 0, R) \leq p \pi R^2$$

für alle $R > 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n W(a; r, R) \leq p \pi (R^2 - r^2)$$

für alle $r > 0$ und alle genügend großen R .

Jetzt fügt er neben der Klasse

\sum_p der schlechthin p -blättrigen Funktionen

noch zwei neue Klassen hinzu, nämlich

$$\begin{aligned} \sum_p & W(a; 0, R) \leq p \pi R^2 & \text{für alle } R \geq R_p \\ (\sum_p) & W_\varrho(a; 0, M_\varrho) \leq p \pi M_\varrho^2 & \text{für alle } \varrho > 1, \text{ die nahe genug bei 1 sind;} \end{aligned}$$

in diesem Falle wird erst nur die Abbildung von $|\zeta| > \varrho$ betrachtet und, nach Wahl von a , $M_\varrho = \max_{|\zeta|=\varrho>1} |F(\zeta) - a|$ definiert; diese Klasse wird als schwach im Mittel p -blättrig bezeichnet. — Die Anordnung dieser Klassen kann durch das Schema

$$\sum_p \subset \overline{\sum_p} \subset \sum_p^\infty \subset (\sum_p)$$

dargestellt werden; $\overline{\sum_p}$ und \sum_p^∞ sind nicht ineinander enthalten, im übrigen gibt es stets Beispiele, die zeigen, daß echte Erweiterungen vorliegen. Die letzte Klasse findet eine schöne Rechtfertigung durch den Satz: $F(\zeta) \in (\sum_p)$ ist notwendig und hinreichend für das Bestehen

der Ungleichung $\sum_{n=1}^\infty (n-p) |\alpha_n|^2 \leq p$. Damit fällt ein neues Licht auf den Flächensatz im

Falle schlichter Funktionen ($p=1$). a heißt Zentrum der p -Blättrigkeit im Mittel; nur für (\sum_p) erweist sich, daß a beliebig wählbar ist. Aus $F(\zeta) \in \overline{\sum_p}$ mit dem Zentrum a , $F(\zeta) \neq a$ für $|f| > 1$ folgt $\sqrt[p]{F(\zeta) - a} \in \overline{\sum_1}$ und $\sqrt[k]{F(\zeta^k) - a} \in \overline{\sum_p}$ mit Zentrum 0 für ganze $k \geq 1$. Das gilt aber nicht für \sum_p , doch besteht dort eine ähnliche Aussage für $\{F(\zeta^{1/k}) - a\}^k$, die ihrerseits nicht bei \sum_p gilt. Die Arbeit enthält noch einige Koeffizientensätze über $|\alpha_1|$, $|\alpha_2|$ bei bel. p und Aussagen über Sternigkeitsgrenzen für \sum_p .
Egon Ullrich.

Alenicy, Ju. E.: Über beschränkte Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Bereichen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 73, 245—248 (1950) [Russisch].

Sei G ein n -fach zusammenhängendes Gebiet, das $z = \infty$ nicht enthält; keine der Konturen sei punktförmig. Alle in G regulären Funktionen $g(z)$ mit Beschränktheit $|g(z)| < 1$ bilden die Klasse R ; R_a sei die Unterklasse der in einem Punkte $a \in G$ verschwindenden Funktionen $g(z, a)$. Verf. stützt sich auf einen Satz von Ahlfors, wonach $|g'(a, a)|$ sein Maximum (in R_a) für jene Funktion $F(z, a)$ erreicht, die G in eine volle n -blättrige Kreisscheibe abbildet (dies. Zbl. 30, 30; doch ist der Satz im Referat übergangen). Eine Reihe von Ungleichungen, die im Falle einfach zusammenhängender Gebiete wohlbekannt sind, kann unter Verwendung dieser Abbildungsfunktion F auch für $n \geq 1$ ausgesprochen werden. Als Beispiel etwa: Für $g(z) \in R$, $z \in G$ gilt $|g'(z)| \leq \{1 - |g(z)|^2\} F(z, z)$; Gleichheit tritt nur für $g(z) = e^{i\varphi} \langle F(z, a) + \alpha \rangle : \langle 1 + \bar{\alpha} F(z, a) \rangle$ bei $|\alpha| < 1$ ein. — Anwendung solcher Ungleichungen auf p -blättrige Sternigkeit einiger Funktionenklassen.
Egon Ullrich.

• **Julia, G.: Leçons sur la représentation conforme des aires simplement connexes.** — 2. éd. (Cahiers scientifiques). Paris: Gauthier-Villars 1950. VIII, 114 p., 39 figs. 550 fr.

Komatu, Yūsaku: Fundamental differential equations in the theory of conformal mapping. Proc. Japan Acad. 25, Nr. 1, 1—10 (1949).

Let $w = F(z)$ be a function which maps $E: |z| < 1$ onto a given simply connected domain D and let D_t be a family of simply connected domains, $t \in [0, t_0]$ such that D_0 und D_{t_0} coincide with the domains $|w| < 1$ and D resp. Let $w = F(z, t)$ be a function mapping E onto D_t . If $F(z, t)$ is differentiable with respect to the parameter t , a differential equation of the form $\partial F(z, t) / \partial t = \Phi[t, z, F(z, t), F'(z, t)]$ may be expected and its integral with initial condition $F(z, 0) = z$ will give a mapping function $F(z)$. The Löwner's and Schaeffer-Spencer's equations are of this kind. In this note the author shows that the Schaeffer-Spencer equation can be obtained by means of Julia-Biernacki's formula for variation of mapping functions and further a corresponding result is obtained for doubly-connected domains.

Jerzy Gorski.

Haegi, Hans R.: Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrößen. *Compositio math.* 8, 81—111 (1950).

Bildet $w = w_0 + r_0 z + a_2 z^2 + \dots$ ($r_0 > 0$) das Innere des Einheitskreises $|z| = 1$ schlicht auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet \mathcal{G} der w -Ebene, das $w = 0$, aber nicht $w = \infty$ enthält, ab, so untersucht Verf. zunächst das Verhalten der Größe $r_0 = r_0(w_0)$, die schon bei den klassischen Untersuchungen von Lindelöf eine Rolle gespielt hat, als Funktion von w_0 und stellt eine Reihe von Eigenschaften derselben fest, wie z. B. daß $\log r_0$ eine hyperharmonische Funktion von w_0 ist. — Die Arbeit bewegt sich im Rahmen des in der letzten Zeit besonders durch die neuen Methoden von Pólya und Szegő stark in den Vordergrund des Interesses geschobenen Problemkreises der Aufstellung von Ungleichungen zwischen „Gebietsgrößen“, d. h. vom Gebiet \mathcal{G} abhängigen Funktionalen. Dabei handelt es sich darum, sowohl solche Ungleichungen aufzustellen, als auch diejenigen „Extremalgebiete“ zu bestimmen, für welche das Gleichheitszeichen eintritt. — Für eine solche Extremalaufgabe wird hier unter Hinzuziehung tieferliegender Methoden von Schiffer eine Lösung gegeben, indem tatsächlich bewiesen wird, daß bei Vorgabe zweier bestimmter Gebietsgrößen Gebiete existieren, die eine dritte Gebietsgröße zum Maximum machen. — Der umfangreiche Bezeichnungsapparat macht leider eine ausführlichere Wiedergabe der Arbeit unmöglich.

Alexander Dinghas.

Warschawski, S. E.: On conformal mapping of nearly circular regions. *Proc. Amer. math. Soc.* 1, 562—574 (1950).

Für kreisnahe Abbildungen des Einheitskreises, die dessen Rand $e^{i\varphi}$ in das Innere des Rings $1 < |f(e^{i\varphi})| < 1 + \varepsilon$ abbilden, werden die Integralmittel p -ter Ordnung ($p > 0$) längs $|z| = r$

$$\mathfrak{M}_p\{w(z)\} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |w(re^{i\vartheta})|^p d\vartheta \right\}^{1/p}$$

für die Funktionen $w = f(z) - z$, $f'(z) - 1$, $f''(z)$, $zf'(z) - 1$, f''/f' u. a. m. abgeschätzt. Die Abhängigkeit von ε ergibt sich dabei der Größenordnung nach genau.

Egon Ullrich.

Warschawski, S. E.: On the degree of variation in conformal mapping of variable regions. *Trans. Amer. math. Soc.* 69, 335—356 (1950).

$w = f(z)$ bilde $|z| < 1$ in ein Gebiet R ab mit dem Rande C , der zunächst als Jordankurve vorausgesetzt wird. Es wird angestrebt, quantitative Aussagen darüber zu machen, wie sich $f(z)$ zu $f_1(z)$ ändert, wenn C durch eine Nachbarkurve C_1 ersetzt wird (bei gleicher Normierung der Abbildungen). Der Fall kreisnaher Abbildungen ist bekannt und von großem praktischen Interesse. Im Gegensatz zu vorhergehenden Arbeiten (Bieberbach, Marčenko, Markušević, J. Ferrand u. a.) werden möglichst schwache Annahmen über C , C_1 angestrebt, und Glattheitsvoraussetzungen, ja sogar die Jordaneigenschaft aufgegeben. — Die Aussagen benutzen folgende Meßgrößen: Sei $|z_0| = 1$, $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$,

$$\omega(r; z_0) = \sup_{|z_1 - z_2| \leq r} |f(z_1) - f(z_2)|, \quad \omega(r) = \sup_{|z_0|=1} \omega(r; z_0).$$

Es werden Schätzungen für $\omega(r)$ gesucht; sie werden ausgedrückt in $\eta(\delta)$, einem Strukturmaß oder Irregularitätsmaß für den Gebietsrand C : Schneidet man von R durch einen Querschnitt $\leq \delta$ ein Stück T ab, das 0 nicht enthält, so sei $\eta(\delta)$ gleich der oberen Grenze der Durchmesser aller so erhaltenen T . — Wir nennen einen Hauptsatz für kreisnahe Gebiete: Sei C in $1 < |\omega| < 1 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \log(8/\pi)$; zu je zwei Punkten in R von Abstand $< \varepsilon$ soll es einen Verbindungsbogen $< \lambda$ in R geben; dann ist mit angebbarem a und beschränktem $k(\varepsilon)$

$$|f(z) - z| \leq \pi \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon k(\varepsilon) + 2\lambda(1 + a\sqrt[3]{\varepsilon/\lambda}).$$

Verwandte Sätze für beliebige Gebietspaare. Zuletzt Aussagen für den Fall glatter Ränder, bzw. für die Abbildung Gebiet \rightarrow Kreis.

Egon Ullrich.

Lewy, Hans: *Developments at the confluence of analytic boundary conditions.* Univ. California Publ. Math., n. Ser. 1, Nr. 7, 247—280 (1950).

In der ζ -Ebene ($\zeta = u + i v$) seien in der Umgebung von $\zeta = 0$ die Kurven I_1' und I_2' durch die Gleichungen $v = u^2 f_1(u)$, $v = u^2 f_2(u)$ gegeben, wo f_1 und f_2 Potenzreihen in u sind. Dann kann die Funktion $F(z)$, $z = x + i y$, die die Halbumgebung $y > 0$ von $z = 0$ so auf eine Halbumgebung von $\zeta = 0$ konform abbildet, daß das negative bzw. positive Stück der reellen Achse $y = 0$ in I_1' bzw. I_2' übergehen, asymptotisch durch eine unendliche Summe $\sum A_m z^m (z \log z)^n$ dargestellt werden. — Diese und ähnliche Probleme werden von Verf. näher untersucht. In gewissen Fällen ergibt sich, daß $F(z)$ auf der Riemannschen Fläche von $\log z$ eindeutig ist, z. B. wenn $F(z)$ eine im oberen Halbkreis um $z = 0$ analytische Funktion ist, deren Realteil $u(x, y)$ auf $y = 0$ stetig ist und dort den Bedingungen: $\partial u / \partial y = 0$ (für $x < 0$) und $\partial u / \partial y = a(x) u$ (für $x > 0$), genügt. [Dabei ist $a(x)$ eine in $x = 0$ nicht verschwindende Potenzreihe in x .] Eine gewisse Differenzen-Differentialgleichung, der $F(z)$ genügt, wird untersucht. *Simion Stoilow.*

Gagua, M. E.: *Über das Verhalten analytischer Funktionen und ihrer Ableitungen in abgeschlossenen Bereichen.* Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 10, 451—456 (1949) [Russisch].

Eine Funktion wird auf einer Menge E_x stetig im Sinne A_p genannt, wenn für jedes Punktepaar $z_1, z_2 \in E_x$ mit positiven A, p

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq A |\log |z_1 - z_2||^{-1-p}$$

gilt. Umformungen und Auswirkungen dieser Verallgemeinerung der Hölder-Bedingungen werden untersucht, endlich auch der Fall A_∞ , daß solche Ungleichungen für alle $p > 0$ bei festem A (unabhängig von p) gelten. *Egon Ullrich.*

Haruki, Hiroshi: *On the period of an integral function in the system of quaternions.* Math. Japon. 1, 124 (1948).

Sei $f(z)$ eine ganze Funktion der Quaternionenvariablen z , d. h. $f(z)$ sei in eine für jedes endliche z konvergierende Reihe nach Potenzen von z entwickelbar. Dann gilt der Satz: Besitzt $f(z)$ eine Periode, so ist diese reell. Der Beweis beruht darauf, daß sich im gegenteiligen Falle eine nichtkonstante, doppeltperiodische und überall reguläre, komplexe Funktion konstruieren läßt. *Adolf Kriszten.*

Meier, Kurt E.: *Über die Randwerte meromorpher Funktionen und hinreichende Bedingungen für Regularität von Funktionen einer komplexen Variablen.* Commentarii math. Helvet. 24, 238—259 (1950).

Le Mémoire comprend deux parties. Dans la première, l'A. étend des résultats connus (Fatou, Plessner, F. Wolf, principe de symétrie de Schwarz) sur les valeurs frontières des fonctions méromorphes: 1° Soit $f(z)$ une fonction de $z = x + i y$ méromorphe dans un domaine G du demi-plan $y > 0$ dont la frontière contient l'intervalle (a, b) de l'axe réel; pour $\xi \in (a, b)$ on représente par $w(\xi, \alpha, \beta)$ le domaine $\alpha \leq \arg(z - \xi) \leq \beta$, par $s(\xi, \alpha)$ la demi-droite $\arg(z - \xi) = \alpha$, par $S(\xi, \alpha)$ l'ensemble des valeurs limites de $f(z)$ quand $z \in s(\xi, \alpha)$ et tend vers ξ ; l'A. démontre que pour tout $\xi \in (a, b)$, exception faite d'un ensemble de mesure nulle, ou bien $f(z)$ a une limite angulaire, ou bien $f(z)$ prend dans $w(\xi, \alpha, \beta)$ une infinité de fois toute valeur $c \in C S(\xi, \alpha) \cap C S(\xi, \beta)$ quels que soient α et β . — 2° $f_1(z)$ étant une fonction méromorphe dans G_1 du demi-plan $y < 0$ dont la frontière (a, b) , on peut définir $S_1(\xi, \alpha)$ de façon analogue à S ; si l'ensemble des $\xi \in (a, b)$ pour lesquels $S(\xi, \pi/2) \cdot S_1(\xi, -\pi/2) = 0$ ou $C S(\xi, \pi/2) \cdot C S_1(\xi, -\pi/2) = 0$ est de première catégorie et de mesure nulle, il existe une fonction méromorphe $= f$ dans G , $= f_1$ dans G_1 et qui est régulière sur un ensemble de points partout dense de l'intervalle (a, b) . — 3° Dans les conditions de 1°, si, pour tout ξ , l'une des valeurs limites angulaires de f est réelle et si, pour tout ξ exception faite d'un ensemble de première catégorie, $C S(\xi, \pi/2)$ contient au moins deux points situés de part et d'autre de l'axe réel, alors il y a au moins un point de (a, b) où f est régulière. — Dans la deuxième partie, l'A. donne des conditions suffisantes pour qu'une fonction $\varphi(z)$ définie et uniforme dans un domaine G soit analytique régulière en un point au moins de ce domaine. Toutes ces conditions font intervenir le comportement de $(\varphi(z+h) - \varphi(z))/h$ quand $h \rightarrow 0$. *Jacques Dufresnoy.*

• Bochner, Salomon and William Ted Martin: *Several complex variables.* (Princeton Mathematical Series, Nr. 10.) Princeton: Princeton University Press 1948. X, 216 pp. \$ 4.00.

Die Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen gehört zu den mathematischen Disziplinen, in denen es bisher wegen des Fehlens moderner Gesamtdarstellungen schwierig war, in der Fülle neuerer Arbeiten, deren jede wieder auf zahlreiche frühere zurückging, sich zurechtzufinden. Um so mehr war das Erscheinen des vorliegenden Werkes zu begrüßen, in dem die Verff. dem Leser ohne besondere Vorkenntnisse in dies Fachgebiet einführen wollen. In der Tat haben sie ein leicht lesbares und anziehendes Buch vorgelegt. — Im ersten Kapitel wird die Theorie der formalen Potenzreihen $f(x_1, \dots, x_k) = \sum a_{n_1, \dots, n_k} x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$ entwickelt. Insbesondere werden sogenannte „innere Transformationen“ $y_\nu = f_\nu(x_1, \dots, x_k)$, $\nu = 1, \dots, k$ untersucht. Unter ihnen ist die Gruppe der nichtentarteten, gleichmäßig beschränkten Transformationen $|a_{n_1, \dots, n_k}^{(p)}(x)| \leq A_{n_1, \dots, n_k}^{(p)}$ mit dem Nullpunkt als Fixpunkt von besonderem Interesse. Es folgt die Übertragung der Sätze von Carathéodory, Henri Cartan, Behnke-Peschl. Besonders bemerkenswert ist die Tatsache, daß alle diese Sätze sich ausschließlich aus dem formalen Charakter der Potenzreihen ergeben. Von einer Konvergenz der Reihen oder der geometrischen Bedeutung der Abbildung wird kein Gebrauch gemacht. So ist Kap. I besonders originell und elegant. — In Kap. II wird zunächst die in einem vorgegebenen Gebiet von komplexen und reellen Veränderlichen analytische Funktion nach Weierstraß definiert (Definition der Regularität). Es folgen die beliebig häufige Differenzierbarkeit, die Cauchysche Integralformel für mehrere komplexe Veränderliche, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, Identitätssätze, das Differenzieren nach konjugiert komplexen Veränderlichen, der Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Funktionaldeterminanten und die Umkehrung von Funktionensystemen. — Kap. III beginnt mit dem überraschenden Beispiel von Fatou-Bieberbach über die volumentreue analytische Abbildung des R_4 auf einen echten Teil von sich. Es folgen die bekannten Eindeutigkeitsätze von Cartan usw., die Sätze über Automorphismen mit innerem Fixpunkt, Anwendung auf die Hyperkugel, Übertragung des Schwarzschen Lemmas und des Dreikreisesatzes. — Kap. IV („Analytic completion“) beginnt mit der Definition: \tilde{D} heißt eine analytische Ergänzung des Gebietes D , falls alle in D analytischen Funktionen noch in \tilde{D} analytisch sind. Es werden nun im ersten Teil des Kapitels Gebiete im Raume einer komplexen Veränderlichen z und n reeller Veränderlichen u_1, \dots, u_n betrachtet. Dort werden die Folgerungen aus dem Kontinuitätssatz (für den Spezialfall der Ebene $u_1 = c_1, \dots, u_n = c_n$) besprochen. Sodann werden im Raume von n komplexen Veränderlichen die Sterngebiete, die Kreiskörper sowie die Reinhardtschen Körper und dazu ihre analytischen Ergänzungen untersucht. — In Kap. V, das nun wieder nur vom Raume von n komplexen Veränderlichen handelt, steht an der Spitze der Begriff der Randeigenschaft (Konvexität von Cartan-Thullen in bezug auf einen einzelnen Randpunkt). Es wird darauf bewiesen: Wenn bei einem Gebiet D eine Menge von Randpunkten P diese Randeigenschaft hat, so gibt es stets eine in D reguläre Funktion, welche bei Annäherung an alle diese Punkte P unbeschränkt ist. Hier findet sodann der Fundamentalsatz von Cartan-Thullen über die gleichzeitige Fortsetzbarkeit einen bescheidenen Platz. Das Kapitel schließt mit dem Begriff der relativen analytischen Ergänzung (K -Konvexität) und einer speziellen Untersuchung über die Hüllen von Tuben. — Kap. VI beginnt mit der Ungleichung von Jensen-Hartogs, behandelt dann das Maximum am Rande, darauf beschränkte Funktionen in Tuben, führt die Klasse der L_p -Funktionen ein, behandelt insbesondere die Klasse L_2 , das sind die quadratisch integrierbaren Funktionen, und anschließend naturgemäß die Orthogonalsysteme. — Kap. VII beschäftigt sich mit den Hartogsschen Reihen $\sum f_{n_1, \dots, n_l}(z_1, \dots, z_k) w_1^{n_1} \cdots w_l^{n_l}$. Es wird zunächst der Hauptsatz von Hartogs über die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihen bewiesen und daran anschließend auf einem anderen Wege, als es Hartogs und Carathéodory tun, gezeigt, daß jede Funktion, die in einem Gebiete D nach jeder ihrer (komplexen) Veränderlichen differenzierbar, regulär in D ist. Es folgt eine Verallgemeinerung. Der Regularitätsradius und später der Meromorphieradius führen dann zu einem Begriff der „Hartogsschen Funktionen“, die in der Ebene im wesentlichen mit den subharmonischen Funktionen übereinstimmen. (Der letzte Absatz von § 6 ist problematisch.) Das Kapitel schließt mit einer Anwendung der „subharmonischen Funktionen“ auf komplexe Liesche Gruppen. — Kap. VIII gibt nach einer Vorbereitung über verallgemeinerte Lösungen partieller Differentialgleichungen im Raume von n reellen Veränderlichen eine Übertragung des Riemannschen Satzes über hebbare Singularitäten für analytische Funktionen. (Dabei der Begriff der „nullifiers“.) Zuletzt wird gezeigt, daß das Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante im Komplexen notwendig und hinreichend für lokale Eineindeutigkeit ist. — Kap. IX beginnt mit dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz (der nicht nur für analytische Funktionen, sondern auch für formale Potenzreihen ausgesprochen wird). Es folgen die Pseudopolynome, nähere Untersuchungen über analytische Flächen, sowie über rationale und algebraische Funktionen in speziellen Gebieten. — Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit analytischen Gebilden M beliebiger Dimension, d. h. den gemeinsamen Nullstellen von lokal gegebenen Systemen regulärer Funktionen. Es wird zunächst das Ergebnis von Walther Rückert dargestellt, wonach lokale Ideale regulärer Funktionen eine endliche Basis haben. Dann folgt die Zerlegung in irreduzible Bestandteile und eine Untersuchung solcher irreduziblen Mannigfaltigkeiten. — In bezug auf dieses letzte Kapitel ist die Forschung inzwischen wesentlich fort-

geschritten. Henri Cartan (dies. Zbl. 38, 237) hat über solche lokalen Aussagen hinaus wesentliche Aussagen globaler Natur über die Ideale gemacht (s. auch K. Oka, dies. Zbl. 36, 52). — Bei der großen Reichhaltigkeit an Ideen und neuen Ansätzen, die das Buch aufweist, und den mannigfachen Anregungen zu selbständiger Arbeit, die die Verff. so dem Leser geben, darf man aber nicht übersehen, daß die Nebenbedingung, die sich die Autoren gestellt haben — nämlich möglichst keine Überschneidung mit den älteren Gesamtdarstellungen eintreten zu lassen —, für die Übersichtlichkeit des Werkes sich ungünstig auswirken mußte. Die Umgehung des fundamentalen Begriffes der Regularitätshülle — der an vielen Stellen geradezu zu greifen ist und doch nur für spezielle Fälle (so für Tuben und Hartogssche Bereiche) implizit definiert wird — wirkt sich störend aus. Auch fehlen der allgemeine Kontinuitätssatz und der Differentialausdruck für die Pseudokonvexität, so daß es nicht immer ganz leicht ist, von der Lektüre dieses Buches den Weg zu der übrigen Literatur zu finden. — Das ist natürlich der Preis, den die Autoren für alles, was positiv über das Buch zu sagen ist, zahlen mußten.

Heinrich Behnke.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

● Jordan, C.: *Calculus of finite differences*. 2nd ed. New York: Chelsea Co. 1950. XXI, 652 p. \$ 5,50.

● Kamke, E.: *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. I*. 3rd ed., reprint. New York: Chelsea Co. 1948. XXVI, 666 p. \$ 7,—.

Szmydtówna, Z.: *Sur les intégrales premières de l'équation $y' = f(x, y)$* . Ann. Soc. Polon. Math. 23, 167—182 (1950).

Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gibt es in der (x, y) -Ebene ein einfach zusammenhängendes Gebiet G und eine in G beliebig oft stetig differenzierbare Funktion $f(x, y)$ mit folgenden Eigenschaften: jedes Integral $z(x, y)$ der Differentialgleichung (1) $z_x + f z_y = 0$, das im ganzen Gebiet G existiert und n -mal stetig differenzierbar ist, ist eine Konstante, aber es gibt in G ein $(n-1)$ -mal stetig differenzierbares Integral $z(x, y)$ der Gleichung (1), das längs jeder Charakteristik von (1) konstant ist und die Ungleichung $z_y \neq 0$ erfüllt.

Erich Kamke.

Ważewski, T.: *Sur certains lemmes relatifs au prolongement des intégrales des équations différentielles ordinaires*. Bull. internat. Acad. Polon. Sci. Lett., Cl. Sci. math. nat., Sér. A 1949, 73—74 (1949).

$f(t)$ liege in einem normierten Banachschen Raum B . Ist bei $t_v > t$ und $t_v \rightarrow t$ $[f(t_v) - f(t)]/(t_v - t) \rightarrow l \in B$, so heiße l die mittlere rechtsseitige Ableitung von f in t : $f_+^*(t)$. Es mögen folgende Voraussetzungen gelten: 1. In jedem Punkt $\alpha < t < \beta < +\infty$ existiere eine mittlere Ableitung $f_+^*(t)$, bestimmt durch eine Folge $\{t_v\}$. 2. Es existiere eine Folge $c_v \in (\alpha, \beta) = \Delta$ derart, daß $\lim_{v \rightarrow \infty} f(c_v) = k \in B$ für $c_v \rightarrow \beta$ gilt. 3. Wenn $d_v \in \Delta$, $d_v \rightarrow \beta$ und $f(d_v) \rightarrow k$ ist, dann sei $\limsup_{v \rightarrow \infty} |f_+^*(d_v)| < +\infty$. 4. Für alle Folgen $\{d_v\}$ gelte $\lim_{v \rightarrow \infty} f_+^*(d_v) = p \in B$. 5. $f(t)$ sei in Δ stetig. Dann kann jedes Integral der Gleichung $y' = f(t, y)$, deren zweite Veränderliche in einem offenen Bereich Ω stetig ist, bis auf den Rand von Ω fortgesetzt werden, wenn y in B variiert und für alle Punkte (t_0, y_0) von Ω ein Integral in der Umgebung von t_0 definiert ist.

Wolfhart Haacke.

Urabe, Minoru: *On integrals of certain ordinary differential equations in the vicinity of the singularity. I*. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 14, 209—215 (1950).

Per il sistema di equazioni differenziali $dx_1/X_1 = dx_2/X_2 = \dots = dx_n/X_n$ nel campo analitico, l'A. studia la forma degli integrali nell'intorno dell'origine, ove le X_1, \dots, X_n sono supposte regolari e nulle. La ricerca viene compiuta nell'ipotesi che, per gli autovalori della matrice jacobiana delle X_1, \dots, X_n rispetto alle x_1, \dots, x_n nell'origine, sia verificata o la condizione detta di Poincaré, o quella più generale detta di Picard.

Gianfranco Cimmino.

Sestakov, A. A.: *Das Verhalten der Integralkurven eines Systems der Form $dx_1/dt = X_1(x_1)$, $dx_i/dt = \varphi_i(x_1, x_i) + X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in der Umgebung eines singulären Punktes*. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 62, 591—594 (1948) [Russisch].

Assume that $x_1 = \dots = x_n = 0$ is an isolated singular point, that $x_1 = 0$ is an isolated root of X_1 , $J = \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{X_1} = \infty$, that the origin is a stationary point

for the X_i , $i = 2, \dots, n$ and that there are constants m, M such that $0 < m < |\varphi_i(x_1, x_i) - \varphi_i(x_1, \bar{x}_i)|/|x_i - \bar{x}_i| < M$ for any pair of points $x_i \neq \bar{x}_i$. Then, if $dX_1/dx_1 \rightarrow 0$ as $x_1 \rightarrow 0$, the integral curves which tend to 0 enter the origin along one and only one direction (cf. Šestakov, this Zbl. 38, 252). *José Massera.*

Lufe, A.I.: Über eine periodische Lösung eines linearen Gleichungssystems mit konstanten Koeffizienten. Priklad. Mat. Mech. 12, 353—362 (1948) [Russisch].

Consider the system $\dot{x}_k = \sum a_{ks} x_s + f_k(t)$, where the f_k are periodic of period T . An harmonic oscillation given by the formulas

$$(3.20) \quad x_s(t) = \sum_{\lambda=1}^n \frac{e^{p_\lambda t}}{1 - e^{-p_\lambda T}} \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_{ks}(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda)} \left[\int_t^T e^{-p_\lambda \tau} f_k(\tau) d\tau + e^{-p_\lambda T} \int_0^t e^{-p_\lambda \tau} f_k(\tau) d\tau \right]$$

is obtained, where the p_λ are the characteristic roots (ch. r.) of the equation $\Delta(p) = |\alpha_{ks} - \delta_{ks} p| = 0$ (assumed to be simple), $\Delta_{ks}(p)$ is the cofactor of the (k, s) element in this determinant and $\exp(-p_\lambda T) \neq 1$ is assumed. If there is a ch. r. $p_n = 0$,

the system has periodic solutions only if $\sum \Delta_{k1}(p_n) \int_0^T f_k(t) dt = 0$ and they form a one parameter family. If there are two complex roots $p_{n-1} = p_n = 2\pi i m/T$ (m integer) and no other ch. r. commensurable with them, and if the two condi-

tions $\sum \Delta_{k1}(p_\lambda) \int_0^T \exp(-2\pi i m t/T) f_k(t) dt = 0$, $\lambda = n-1, n$ are satisfied,

a two parametric family of solutions exists. In the latter cases the solutions are given by formulas (3.24) and (3.27) in the text. Formula (3.20) as given in the text contains a misprint. *José Massera.*

Gusarov, L. A.: Über Lösungen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die gegen Null streben. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 71, 9—12 (1950) [Russisch].

Beweis des Satzes: Für die Gleichung $y'' + p(x)y = 0$ erfülle $p(x)$ die Lösbarkeitsbedingungen für alle $x \geq x_0$, $p'(x)$ sei stetig und von beschränkter Schwankung für $x \geq \bar{x}_0 \geq x_0$, und es gelte $q(x) \leq p(x) \leq [q(x)]^s$ für alle $x \geq \bar{x}_0 \geq \bar{x}_0$, wo $q(x)$ eine monoton nicht abnehmende Funktion sei, die zusammen mit x gegen ∞ strebt, und $s \geq 1$. Dann streben alle Lösungen der Gleichung bei $x \rightarrow \infty$ gegen Null. — Der Beweis beruht auf einer Abschätzung von $\max_{x_n \leq x \leq x_{n+1}} |y(x)|$, wo x_1, x_2, \dots die Nullstellen der Lösung $y(x)$ bedeuten, der

Größe nach numeriert, von einer zweckmäßig bestimmten ersten Nullstelle an. Dabei müssen wesentlich die beiden Fälle unterschieden werden: es gibt ein $\bar{x}_1 \geq \bar{x}_0$, so daß für alle $x \geq x_1$ $p'(x) \geq 0$ ausfällt, oder es gibt keins. In beiden Fällen ergeben sich zugleich Abschätzungen für das Wachstum von $|y'(x)|$ und das Abklingen von $|y(x)|$ bei $x \rightarrow \infty$ durch Ausdrücke, die von $p(x)$, $q(x)$ und der Schwankungsfunktion von $p'(x)$ abhängen. — Der Satz kann auch so verallgemeinert werden: Wenn in der Gleichung $y'' + \mu(x)y = 0$ die Funktion $\mu(x)$ den Existenzbedingungen der Lösung für $x \geq x_0$ genügt und stückweise stetig für $x \geq x_1 \geq x_0$ ist und wenn man ferner eine Funktion $p(x)$ angeben kann, die den Bedingungen des ursprünglichen Satzes und außerdem noch der Bedingung

$$\int_{x_1}^{\infty} |\mu(x) - p(x)| dx < +\infty$$

genügt, so streben alle Lösungen der vorgelegten Gleichung bei $x \rightarrow \infty$ nach Null.

Erik Svenson.

Myškis, A.: Untersuchung einer Form von Differentialgleichungen mit retardiertem Argument mit Hilfe der verallgemeinerten Fibonacciischen Reihe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **71**, 13—16 (1950) [Russisch].

Die in der Überschrift gekennzeichnete Differentialgleichung lautet $y'(x) + M(x)y(x - \Delta(x)) = 0$ mit $M(x) \geq 0$, $\Delta(x) \geq 0$, $A \leq x < B$, $M_0 < \infty$, $\Delta_0 < \infty$, $0 < M_0 \Delta_0 < 1/4$. Verf. stützt sich auf eine frühere Untersuchung dieser Gleichung von ihm (dies. Zbl. **35**, 179) und verwendet die dortigen Ergebnisse und Bezeichnungen. Vor allem setzt er die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung bei gegebenen Anfangswerten $\varphi(x)$ als bekannt voraus. Mit einer Reihe von Hilfsätzen, in denen eine Verallgemeinerung der Fibonacciischen Reihe verwendet wird und die die Wachstums- bzw. Abklingungsverhältnisse der Lösungsfunktion $y(x)$ und ihr Verhalten bei $x \rightarrow B$ betreffen, wird folgender Satz bewiesen: Es bedeute b die kleinste Nullstelle von $y(x)$ für $x \geq A$, deren Existenz vorausgesetzt wird. Ist dann $\varphi(x) \geq 0$, $b < B$ und $y(x) \equiv 0$ für $x > b$, so besteht die Menge der Nullstellen von $y(x)$ aus einem Intervall $\langle b, b_1 \rangle$ ($b \leq b_1$). Ist $B < \infty$, so existiert $\lim_{x \rightarrow B} y(x)$ und ist kleiner als Null, ist jedoch $B = \infty$, so klingt $y(x)$ langsam ab,

d. h. es gibt eine Konstante $C > 0$, so daß für genügend große x gilt: $|y(x)| > C \exp[-(\Delta_0^{-1} \ln \omega) x]$, wobei $\omega = 2/(1 + \sqrt{1 - 4 M_0 \Delta_0})$ ist. Ein langsames oder schnelles Abklingen von $y(x)$ bei $B = \infty$ besteht in jedem Fall, auch wenn obige spezielle Voraussetzungen nicht erfüllt sind. Dabei heißt das Abklingen schnell, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für alle x gilt:

$|y(x)| < C \exp[-(\Delta_0^{-1} \ln \Omega) x]$, wobei $\Omega = 2/(1 - \sqrt{1 - 4 M_0 \Delta_0})$ bedeutet.

Erik Svenson.

Krejn, M. G.: Verallgemeinerung einiger Untersuchungen von A. M. Ljapunov über lineare Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **73**, 445—448 (1950) [Russisch].

Verallgemeinerung einiger Resultate der Theorie von Ljapunov über die Stabilität der Lösungen von linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten auf Systeme von linearen Differentialgleichungen, wobei diese zu einer einzigen Gleichung in Vektorform zusammengefaßt werden. Gegeben ist die Vektordifferentialgleichung $dx/dt = \lambda J H(t)x$, wo $x(t)$ eine n -dimensionale Vektorfunktion ist mit $n = 2m$, λ ein Parameter, $H(t)$ eine reelle symmetrische Matrix, deren Elemente $h_{jk}(t)$, $j, k = 1, \dots, n$, summierbare periodische Funktionen von t sind: $H(t + \omega) = H(t)$, und schließlich $J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$ mit der m -dimensionalen Einheitsmatrix I_m . Diese Form besitzen alle Systeme kanonischer Bewegungsgleichungen von mechanischen Systemen mit m Freiheitsgraden, deren Hamiltonsche Funktion eine quadratische Form der verallgemeinerten Koordinaten und Impulse mit periodischen Koeffizienten darstellt. Auf sie läßt sich auch jede Vektorgleichung $d^2 y/dt^2 + \lambda^2 P(t)y = 0$, wo $y(t)$ eine m -dimensionale Vektorfunktion und $P(t) = P(t + \omega)$ eine symmetrische Matrizenfunktion darstellt, zurückführen. — Übertragen von dem skalaren auf den Vektorfall wird der Satz von Ljapunov: Wenn die Matrix $\bar{P}(t)$ der Bedingung genügt, daß die quadratische

Form $(P(t)\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^n h_{jk}(t)\xi_k\xi_j$ ($\xi \neq 0$) für beliebiges t nicht negativ und ihr Mittelwert bezüglich t im Intervall $(0, \omega)$ positiv ist, so sind für alle Parameterwerte λ , die

der Bedingung $0 < \lambda^2 < \frac{4}{\omega} \int_0^\omega \pi(t) dt$ genügen, alle Lösungen $y(t)$ der letzten Gleichung

beschränkt. Dabei bedeutet $\pi(t)$ den größten Eigenwert von $P(t)$. Ferner werden Sätze über das Verhalten der sogenannten Multiplikatoren $\varrho(\lambda)$ [das sind die Wurzeln des Polynoms $\det(U(\omega; \lambda) - \varrho I_n)$, wo die Monodromiematrix U Lösung der Gleichung $dU/dt = \lambda J H U$ mit $U(0; \lambda) = I_n$ ist] bei zwischen den Eigenwerten der ursprünglichen Differentialgleichung mit den Randbedingungen $x(0) = x(\omega)$ bzw. $-x(\omega)$ wachsendem λ bewiesen, die im skalaren Fall von Putnam (dies. Zbl. **31**, 401) aufgestellt worden sind. Am Schluß wird ohne Beweis angegeben, daß die Ausgangsgleichung eine unendliche Anzahl von Stabilitätszonen besitzt (also Intervalle, in denen für jeden Wert von λ alle Lösungen beschränkt ausfallen und die sich nicht weiter ausdehnen lassen), die nach beiden Seiten ins Unendliche rücken, allein unter der Voraussetzung, daß die Matrix $H(t)$ zweimal stetig differenzierbar ist und alle ihre Eigenwerte bei beliebigem t positiv und verschieden ausfallen. *Erik Svenson.*

Levitan, B. M.: Beweis eines Satzes über die Entwicklung nach Eigenfunktionen selbstadjungierter Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **73**, 651—654 (1950) [Russisch].

Neuer Beweis eines Satzes von Krejn [Sbornik Rabot Inst. Mat. Akad. Nauk Ukrainsk. SSR, Nr. **10**, 83 (1948)]: Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen, die p -mal stetig differenzierbar sind und außerhalb des Intervalles (α, β) identisch verschwinden. Es gibt dann mindestens eine symmetrische, monoton wachsende Matrixfunktion $t_{ij}(\lambda)$, $i, j = 1, \dots, p$, $-\infty < \lambda < +\infty$, für die die verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung besteht:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x) dx = \sum_{i,j=1}^p \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(\lambda) G_j(\lambda) dt_{ij}(\lambda)$$

mit

$$F_i(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \varphi_i(x, \lambda) dx, \quad G_i(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) \varphi_i(x, \lambda) dx,$$

wobei die Funktionen $\varphi_i(x, \lambda)$, $i = 1, \dots, p$, Lösungen einer selbstadjungierten Differentialgleichung p -ter Ordnung

$$y^{(p)} + a_1(x) y^{(p-1)} + \dots + a_p(x) y + \lambda y = 0$$

bedeuten, die der Anfangsbedingung $\varphi_j^{(t-1)}(0, \lambda) = \delta_{ij}$ genügen. Die Koeffizientenfunktionen $a_i(x)$ sind reell und in jedem endlichen Intervall beschränkt vorausgesetzt. — Für $p = 2$ ist der Satz zuerst von Weyl bewiesen worden (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. **1910**, 442—467). — Der Beweis benutzt die Hilfsmittel der Theorie der orthogonalen Funktionen und einen Satz von Helly. Er besteht darin, daß die zu beweisende Gleichung zuerst für ein endliches Intervall (a, b) , das (α, β) enthält, bewiesen wird, indem der Differentialgleichung Randbedingungen zugeordnet werden, so daß eine selbstadjungierte homogene Randwertaufgabe für (a, b) entsteht. Die Matrizelemente $t_{ij}(\lambda)$ hängen dann noch von der Wahl von a und b ab. Sodann wird der Grenzübergang $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow +\infty$ durchgeführt.

Erik Svenson.

Rapoport, I. M.: Über ein Variationsproblem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Randbedingungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **73**, 889—890 (1950) [Russisch].

Bewiesen wird: Für die Differentialgleichung $x''(t) + \lambda p(t) x(t) = 0$, $0 \leq t \leq T$, mit den Randbedingungen $x(0) = x(T) = 0$, wo $p(t)$ eine nicht-negative, im Intervall $(0, T)$ summierbare Funktion ist, $\frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = 1$, besteht

für die Eigenwerte die Ungleichung $\lambda_n(p) > 4n^2/T^2$, $n = 1, 2, \dots$. Durch Angabe spezieller Funktionen $p(t)$ wird gezeigt, daß diese Ungleichung im allgemeinen nicht verbessert werden kann, da die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_n(p)$ für sie dem Wert $4n^2/T^2$ beliebig nahe kommen können, und daß die Eigenwerte $\lambda_n(p)$, insbesondere schon $\lambda_1(p)$, beliebig große Werte annehmen können.

Erik Svenson.

El'sin, M. I.: Qualitative Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Uspechi mat. Nauk **5**, Nr. 2 (36), 155—158 (1950) [Russisch].

Verf. tritt in einem kurzen, historisch gehaltenen Bericht über die qualitative Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$, $a < t < b$ (zugehört $a = -\infty$, $b = +\infty$), mit stetigen Funktionen $p(t)$ und $q(t)$ für die von ihm bevorzugte Phasenmethode ein, die er in mehreren Arbeiten zur Lösung des Problems verwendet hat [dies. Zb. **36**, 337 und Doklady Akad. Nauk SSSR **68**, 221—224, **69**, 7—10 (1949)]. Das Problem der qualitativen Lösung dieser Schwingungsgleichung besteht darin, aus der Menge der Funktionen $p(t)$ und $q(t)$ solche Untermengen auszusondern, die gewisse, vorbestimmte Eigenschaften der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung erzeugen. Das Wesen der Phasenmethode wird kurz geschildert und ihre Leistungsfähigkeit zur Aufstellung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen, die die gesuchten Untermengen kennzeichnen, an verschiedenen Beispielen belegt. Seit der klassischen Arbeit von Sturm vor hundert Jahren wird meist die Methode des Vergleichs der Abstände zwischen den Nullstellen einer Lösung in verschiedenen Abwandlungen benutzt, die aber auf erhebliche Schwierigkeiten stößt. Daher haben verschiedene Autoren des 20. Jahrhunderts auf die Phasenmethode zurückgegriffen, die, wie schon Sturm erkannt hatte, die naturgemäße ist. Es werden die Gründe erwähnt, warum jene Autoren bei Anwendung dieser Methode, insbesondere beim Übergang von der Phasenabschätzung zur Abschätzung der Nullstellenabstände, keinen vollen Erfolg hatten, vielmehr ihre Resultate vielfach irrtümlich und der Kritik ausgesetzt waren. Einen wesentlichen Fortschritt in der Ver-

wendung dieser Methode und eine befriedigende Lösung des Problems meint erst der Verf. erzielt zu haben, und zwar durch die folgenden beiden Hilfsmittel: Erstens hat er mit der jahr-

hundertealten Tradition der Verwendung der Substitution $x = y \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{p}{2} d\xi \right)$ gebrochen

und sie durch eine allgemeinere ersetzt: $x = y \exp \int_{t_0}^t \left(\theta - \frac{p}{2} \right) d\xi$, wo θ eine beliebige stetige

Funktion ist, für die $\theta - p/2$ eine stetige Ableitung besitzt, und zweitens hat er die Ungleichungen, die die Vergleichsmethode benutzt, durch eine Integralbeziehung für die veränderliche Frequenz abgelöst.

Erik Svenson.

Gradštejn, I. S.: Lineare Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten und kleinen Parametern bei den höchsten Ableitungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 27 (69), 47—68 (1950) [Russisch].

Verf. nimmt das von ihm schon mehrfach erörterte Problem erneut auf, inwieweit man bei einer Differentialgleichung durch Vernachlässigung von Gliedern mit höheren Ableitungen, deren Koeffizienten klein sind, wirklich Näherungslösungen erhält (vgl. etwa dies. Zbl. 37, 60). Die neue Arbeit führt insofern über die früheren hinaus, als sie eine lineare Differentialgleichung nicht mehr mit konstanten, sondern mit veränderlichen Koeffizienten betrifft. Wie früher hängen die Koeffizienten außerdem von einem und demselben Parameter η mit kleinen Werten ab, der in die höheren Ableitungen in höherer Ordnung eingeht. Die Gleichung lautet also

$$(1) \quad \sum_{k=0}^m \alpha_k(t, \eta) \frac{d^k X}{dt^k} + \sum_{k=1}^n \eta^k \alpha_{m+k}(t, \eta) \frac{d^{m+k} X}{dt^{m+k}} = \alpha_{-1}(t, \eta).$$

Die Koeffizienten $\alpha_k(t, \eta)$ und die rechte Seite $\alpha_{-1}(t, \eta)$ sind komplexe Funktionen der reellen Veränderlichen t und η , die für $t_0 \leq t \leq T$, $0 \leq \eta \leq \varepsilon_0$ beschränkt und in η analytisch sind.

Die verkürzte Gleichung ist (2) $\sum_{k=0}^m \alpha_{k0}(t) \frac{d^k x}{dt^k} = \alpha_{-1,0}(t)$, deren Koeffizienten sich für $\eta = 0$ aus obigem ergeben. Bei der Untersuchung spielt eine wichtige Rolle die „charakteristische Gleichung“

$\sum_{k=0}^m \alpha_{m+k}(t) w^{m+k} = 0$. Es wird vorausgesetzt, daß die untere Grenze der Realteile aller ihrer nicht identisch verschwindenden Wurzeln $w_i(t)$ nicht positiv ist und eine Zahl t_1 existiert ($t_0 < t_1 < T$) derart, daß für $t_0 < t < t_1$ alle jene Wurzeln $w_i(t)$ einen negativen Realteil besitzen. — Als Zwischenergebnis wird für die zugehörige homogene Gleichung der Satz bewiesen: Wenn die Anfangswerte der Lösung der gegebenen Gleichung und ihrer Ableitungen den Ordnungsrelationen genügen: $X^{(l)}(t_0, \eta) = O(\eta^0)$ für $l = 0, 1, \dots, m-1$, $X^{(l)}(t_0, \eta) = O(\eta^{m-l})$ für $l = m, m+1, \dots, m+\mu-1$, so streben die Lösungen $X(t, \eta)$ und ihre Ableitungen bis zur $m-1$ -ten Ordnung einschließlich bei $\eta \rightarrow 0$ gleichmäßig in η im Intervall $t_0 \leq t \leq T$ zu einer Lösung $x(t)$ der zugehörigen homogenen verkürzten Gleichung, für deren Anfangswerte $x^{(l)}(t_0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} X^{(l)}(t_0, \eta)$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, gilt und zu den entsprechenden Ableitungen dieser

Lösung: $\lim_{\eta \rightarrow 0} X^{(l)}(t, \eta) = x^{(l)}(t)$, $l = 0, 1, \dots, m-1$ Die Ableitungen höherer Ordnung von

$X(t, \eta)$ bis zur $(m+\mu-1)$ -ten zeigen für $t_0 < t \leq T$ dasselbe Verhalten. — Die Hauptfrage ist die, welche unter den Lösungen der Gleichung (1) bei $\eta \rightarrow 0$ gegen eine gegebene Lösung der verkürzten Gleichung (2) streben zugleich mit einem entsprechenden Verhalten der Ableitungen bis zur $(m-1)$ -ten Ordnung, d. h. die Aufstellung von hierzu notwendigen und hinreichenden Bedingungen zwischen den Anfangswerten der Lösungen beider Gleichungen. Diese Frage löst Verf. im Falle, daß das Wachstum der Anfangswerte der Gleichung (1) beschränkt ist, also $X^{(l)}(t_0, \eta) = O(\eta^{-l})$, $l = 0, 1, \dots, m+\mu-1$, gilt. Auf die Wiedergabe der aufgestellten Bedingungen muß wegen ihrer komplizierten Art hier verzichtet werden. Die Beweise beruhen im wesentlichen auf Sätzen von Noaillon [Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. Sér. 9, Nr. 15 (1912)], in denen den Lösungen der hier in Rede stehenden homogenen und inhomogenen Differentialgleichung bestimmte Formen, die hier zur Verwendung gelangen, gegeben werden.

Erik Svenson.

Bylov, B. F.: Über eine Abschätzung der charakteristischen Zahlen der Lösungen fast diagonalen Systeme von linearen Differentialgleichungen. Priklad. Mat. Mech. 14, 114—116 (1950) [Russisch].

Bewiesen wird der Satz: Es sei $\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j$, $i = 1, \dots, n$, ein reguläres System linearer, homogener Differentialgleichungen, dessen Koeffizienten stetige

und beschränkte Funktionen von t sind, die für $t \geq 0$ der Bedingung genügen: $p_{ii} \geq p_{i+1, i+1} + 2(n-1)Q$ mit $Q = \max_{i \neq j} |p_{ij}|$. Dann existiert ein Normalsystem der Lösungen x_{k1}, \dots, x_{kn} dieser Gleichung, dessen Matrix der Anfangswerte die Form einer Dreiecksmatrix mit Nullen oberhalb der Hauptdiagonale und Einsen in der Hauptdiagonale hat, mit der Eigenschaft, daß die Werte seiner charakteristischen Zahlen λ_k wie folgt eingeschränkt sind:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [-p_{kk}(\tau) - (n-1)Q(\tau)] d\tau \leq \lambda_k \leq -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [p_{kk}(\tau) - (n-1)Q(\tau)] d\tau,$$

$k = 1, \dots, n$. Die zum Beweise notwendigen Abschätzungen werden nach einer von Perron [Math. Z. 31, 748—766 (1930)] angegebenen Methode ausgeführt.

Erik Svenson.

Langer, Rudolph E.: The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point. Trans. Amer. math. Soc. 67, 461—490 (1949).

Sia data l'equazione

$$(1) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + [\lambda^2 q_0(x) + \lambda q_1(x) + R(x, \lambda)] u = 0, \quad (2) \quad R(x, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z_{\nu}(x)}{\lambda^{\nu}},$$

dove $q_0(x)$, $q_1(x)$, $z_{\nu}(x)$ sono funzioni reali della variabile reale x definite in $(-a, a)$, aventi derivate di tutti gli ordini, λ è un parametro complesso e la serie (2) è convergente per $|\lambda|$ sufficientemente grande. — Se $q_0(x) \neq 0$ in $(-a, a)$ l'A. indica un procedimento formale ricorrente per la risoluzione dell'equazione (1). — Il caso trattato nella memoria è quello in cui $q_0(x)$ abbia uno zero del primo ordine nel punto 0, e sia $x q_0(x) > 0$ per $x \neq 0$, o, come si dice, il punto 0 sia un punto di varianza (in inglese turning point). Se $q_0^{1/2}(x)$ indica quella determinazione che sull'asse reale positivo è positiva e si pone

$$\Phi(x) = q_0^{1/2}(x), \quad \xi = \lambda \int_0^x \Phi(x) dx, \quad \psi(x) = \frac{\left[\int_0^x \Phi(x) dx \right]^{1/6}}{[\Phi(x)]^{1/2}}$$

la funzione $v(x, \lambda) = \psi(x) \xi^{1/3} H_{1/3}(\xi)$, dove $H_{1/3}(\xi)$ indica una funzione di Bessel di ordine $1/3$, soddisfa l'equazione (3) $d^2 v/dx^2 + [\lambda^2 q_0(x) + \theta(x)] v = 0$, $\theta(x) = -\psi''(x)/\psi(x)$; l'equazione (3), in cui il termine in λ^2 del coefficiente di v coincide con il corrispondente della (1) è chiamata dall'A. la prima equazione associata alla (1). — L'A. costruisce successivamente una seconda equazione

$$\text{associata alla (1) della forma } \frac{d^2 z}{dx^2} + [\lambda^2 q_0(x) + \lambda q_1(x) + k(x, \lambda)] z = 0 \text{ con } k(x, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_{\nu}(x)}{\lambda^{\nu}}$$

con la serie del secondo membro convergente per $|\lambda|$ sufficientemente grande e in generale costruisce un'equazione associata alla (1) della forma

$$(4) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \left[\lambda^2 q_0(x) + \lambda q_1(x) + R(x, \lambda) + \frac{\Omega(x, \lambda)}{\lambda^m} \right] y = 0$$

con $\Omega(x, \lambda)$ limitato quando $|\lambda|$ è abbastanza grande e nella quale il coefficiente di y coincide con quello di u nella (1) fino ai termini in $1/\lambda$ di ordine $m-1$. — Gli integrali $y_j(x, \lambda)$ dell'equazione (4) si esprimono per le funzioni $H_{1/3}^{(1)}$, $H_{1/3}^{(2)}$, $H_{2/3}^{(1)}$, $H_{2/3}^{(2)}$ die terza specie die Bessel con le formule

$$y_j(x, \lambda) = \left\{ c_{j,1} \left[\left(\psi E_0 + \frac{\psi' E_1}{\lambda} \right) \xi^{1/3} H_{1/3}^{(1)}(\xi) + \frac{E_1}{\lambda^{1/3} \psi} \xi^{2/3} H_{2/3}^{(1)}(\xi) \right] \right. \\ \left. + c_{j,2} \left[\left(\psi E_0 + \frac{\psi' E_1}{\lambda} \right) \xi^{1/3} H_{1/3}^{(2)}(\xi) + \frac{E_1}{\lambda^{1/3} \psi} \xi^{2/3} H_{2/3}^{(2)}(\xi) \right] \right\},$$

con $E_0(x, \lambda)$, $E_1(x, \lambda)$ funzioni note di x e λ e $c_{1,1}$, $c_{1,2}$, $c_{2,1}$, $c_{2,2}$ costanti tali che $c_{1,1} c_{2,2} - c_{1,2} c_{2,1} = 1$; la valutazione dell'errore che si commette quando per le $u_j(x, \lambda)$ si prendano le $y_j(x, \lambda)$ dipende da un'equazione integrale lineare di Volterra. — Con questo suo metodo l'A. prova ad esempio che se $0 \leq \arg \lambda < \pi/2$ la (1) ammette una coppia di soluzioni della forma $u_j(x, \lambda) = y_j(x, \lambda) + \xi^{-1/6} e^{\mp i\xi} O(1)/\lambda^{m+1}$ per $|\xi|$ sufficientemente grande (dove per $j=1$ si dovrà prendere $e^{-i\xi}$ e per $j=2$, $e^{i\xi}$) e della forma $u_j(x, \lambda) = y_j(x, \lambda) + O(1)/\lambda^{m+1}$ per $|\xi| \leq N$. — L'A. considera poi i casi in cui l'argomento di λ varia negli altri quadranti.

Giovanni Sansone.

Langer, Rudolph E.: Asymptotic solutions of a differential equation in the theory of microwave propagation. Commun. pure appl. Math. 3, 427—438 (S 73—S 84) (1950).

La propagazione delle microonde è retta da un'equazione della forma (1) $d^2U/dh^2 + k^2(A + y(h))U = 0$, dove $y(h)$ è una funzione nota della variabile complessa h , ad esempio nel primo quadrante, reale e positiva per $h > 0$, e k e A sono due costanti. L'A. valendosi di alcuni suoi procedimenti (questo Zbl. 5, 158 e la recensione preced.) prova che se h_1 è una radice semplice dell'equazione (2) $A + y(h) = 0$, (h_1 punto di varianza, in inglese turning point), se posto

$$\varphi(h) = [A + y(h)]^{1/2}, \quad Q = k\varphi(h), \quad u = \int_{h_1}^h Q dh, \quad \psi(h) = \Phi^{1/6}(h)\varphi^{-1/2}(h).$$

$\theta(h) = \psi''(h)\psi^{-1}(h)$ l'integrale $\int_0^\infty \left| \frac{\theta(h)}{\varphi(h)} \right| dh$ risulta convergente, allora per h grande la (1) ammette una coppia $U_j(x, \lambda)$, ($j = 1, 2$) di soluzioni della forma

$$\left\{ \left[1 + \frac{\alpha(h)}{k^2} \right] Z_1(h) + \frac{\beta(h)}{k^2} Z_1'(h) \right\} \left[1 + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \right],$$

$$\left\{ \left[1 + \frac{\alpha(h)}{k^2} \right] Z_2(h) + \frac{\beta(h)}{k^2} Z_2'(h) \right\} \left[1 + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \right],$$

e per u piccolo della forma

$$\left[1 + \frac{\alpha(h)}{k^2} \right] Z_1(h) + \frac{\beta(h)}{k^2} Z_1'(h) + O\left(\frac{1}{k^{10/3}}\right), \quad \left[1 + \frac{\alpha(h)}{k^2} \right] Z_2(h) + \frac{\beta(h)}{k^2} Z_2'(h) + O\left(\frac{1}{k^{10/3}}\right),$$

$$\text{con } \beta(h) = \frac{1}{2\varphi(h)} \int_{h_1}^h \frac{\theta(h)}{\varphi(h)} dh, \quad \alpha(h) = -\frac{1}{2} \left[\beta'(h) + \int_{h_1}^h \theta(h)\beta(h) dh \right],$$

$$\text{e } Z_j(h) = [u/Q]^{1/2} H_{1/3}^{(j)}(u) \quad (j = 1, 2),$$

essendo $H_{1/3}^{(1)}, H_{1/3}^{(2)}$ le funzioni di Bessel di terza specie. — L'A., valendosi poi di un altro suo procedimento (questo Zbl. 8, 312) anche nel caso che h_1 sia uno zero doppio della (2) trova la forma di una coppia di soluzioni della (1).

Giovanni Sansone.

Mitrinovitc, Dragoslav S.: Sur une équation différentielle indéterminée. Fac. Philos. Univ. Skopje, Sect. Sci. mat., Annuaire 3, Nr. 6, 1—10 und französ. Zusammenfassg. 11—16 (1950) [Kroatisch].

Für die „unbestimmte“ Differentialgleichung $y''/y - z''/z = c$, $y = y(x)$, $z = z(x)$ gibt Verf. zwei Reduktionsverfahren an: Wird $\eta(x) = \ln|y|$, $\zeta(x) = \ln|z|$, $\vartheta(x) = \eta - \zeta$ gesetzt, so ergeben sich als Lösungen, soweit $y(x) \neq z(x)$ ist, genau die Funktionen $y = \frac{A}{\sqrt{|\vartheta|}} \exp \frac{1}{2} \int \left(\frac{c}{\vartheta} + \vartheta \right) dx$, $z = \frac{B}{\sqrt{|\vartheta|}} \exp \frac{1}{2} \int \left(\frac{c}{\vartheta} - \vartheta \right) dx$ mit beliebigem $\vartheta(x)$. — Wird $y = T(x)$, $z'(x) = p(z)$ gesetzt, so erhält man für $p(z)$ die Bernoullische Differentialgleichung $(zT' - T)p'(z) + T''zp = cTp/p$.

Erich Kamke.

Mitrinovitc, Dragoslav S.: Sur l'équation différentielle d'un problème important de la théorie de l'élasticité. Fac. Philos. Univ. Skopje, Sect. Sci. natur., Annuaire 3, Nr. 5, 1—14 und französ. Zusammenfassg. 15—22 (1950) [Kroatisch].

L'A. espone un metodo di calcolo per quadrature di soluzioni dell'equazione di Neményi-Truesdell

$$(E) \quad \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dz^2} + (n^2 - 1) \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dz^2} = 0$$

essendo n un numero intero positivo ed f, F due funzioni incognite di z . — È evidente che la (E) si riconduce al sistema di equazioni

$$(S) \quad d^2 f/dz^2 = \Phi(z)f, \quad d^2 F/dz^2 = (1 - n^2)\Phi(z)F$$

dove $\Phi(z)$ è una funzione arbitraria di z ed allora si pone il problema di integrare un'equazione del tipo (1) $d^2H/dz^2 = h \Phi(z) H$, dove h è un parametro arbitrario indipendente da z . Se $a(x)$ è una funzione (non costante), tale che $\Phi(a) a'^2 = 1$, $' = d/dx$ se si pone $\varphi(x) = \frac{1}{4}(a''/a')^2 - \frac{1}{2}(a'/a)'$, $z = a(x)$, $H = \eta \sqrt{a'}(x)$, la (1) si muta in (2) $d^2\eta/dx^2 = (\varphi(x) + h) \eta$. Inversamente, se si vuol passare dalla (2) alla (1), converrà porre (3) $a''/a' = -2\omega'/\omega$, escludendo che la ω sia costante. Allora la ω soddisfa all'equazione (4) $d^2\omega/dx^2 = \varphi(x) \omega$, che è del tipo (2) con $h = 0$. — Valgono allora le due proposizioni seguenti, inverse l'una dell'altra. I. Se l'equazione (1) è integrabile per una determinata forma di $\Phi(z)$, essendo h arbitrario, la (2) è anche integrabile quando $\varphi(x)$ abbia la forma corrispondente a $\Phi(z)$. II. L'integrabilità per quadrature della (2) per una determinata $\varphi(x)$ ed h arbitrario trae con sé l'integrabilità delle equazioni (3) e (4) e quindi della (1) per h arbitrario, la funzione $\Phi(z)$ essendo determinata dalla relazione $z = a(x)$, $\Phi(z) = 1/a'^2$. In tal modo si possono facilmente costruire soluzioni dell'equazione di Neményi-Truesdell e l'A. illustra il metodo supponendo che sia $\varphi(x) = 2/x^2$.
Giovanni Lampariello.

Abramowitz, Milton: Asymptotic expansions of Coulomb wave functions. Quart. appl. Math. 7, 75—84 (1949).

Der vom Abstand vom Anziehungszentrum abhängige Faktor der Wellenfunktion des Wasserstoffatoms genügt (nach einer elementaren Transformation) der Differentialgleichung $y'' + \{1 - 2\eta/\varrho - L(L+1)/\varrho^2\} y = 0$. Für die Lösungen mit dem Verhalten

$$y = F_L(\varrho, \eta) \rightarrow \sin(\varrho - \eta \ln 2\varrho + L\pi/2 + \sigma_L)$$

für $\varrho \rightarrow \infty$, worin $\sigma_L = \arg \Gamma(L + a + i\eta)$, werden für $L = 0$ asymptotische Darstellungen für $\varrho \gg \eta$ und verschiedene Näherungsformeln für $\varrho < 2\eta$ und $\varrho > 2\eta$ angegeben. Ihre Herleitung geschieht zum Teil aus Integraldarstellungen der konfluenten hypergeometrischen Funktionen, zum Teil durch geeignete formale Reihenentwicklungen. Die Methoden und Ergebnisse lassen sich auf ganze $L \neq 0$ übertragen.
Josef Meixner.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Lepage, Th. H.: Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Ser. 32, 140—151 (1947).

L'A. studia l'equazione (1) $F(p_{ij}) = 0$ ($p_{ij} = \partial^2 z / \partial x_i \partial x_j$; $i, j = 1, \dots, n$), dove F è una funzione lineare nei determinanti di ordine n della matrice (E, P) [E matrice unitaria, $P = (p_{ij})$, $p_{ij} = p_{ji}$] a coefficienti funzioni analitiche delle $x_i, z, p_i = \partial z / \partial x_i$. Precisamente, utilizzando la teoria delle forme differenziali, caratterizza le equazioni del tipo (1) che possono ottenersi annullando la variazione prima di un integrale multiplo.
Luigi Amerio.

Nagumo, Mitio: Anwendung der Variationsrechnung auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung. J. Okasa Inst. Sci. Technol., Part I 2, 85—88 (1950) [Esperanto].

Verf. weist auf frühere Arbeiten von Yoshiye hin [Math. Ann. 57, 185—194 (1903) und J. Coll. Sci., Imp. Univ. Tokyo 32 (1913)], in denen die Charakteristiken-gleichungen der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung aus der Variationsrechnung hergeleitet wurden. Diese Herleitung wird vom Verf. durch eine andere ersetzt, welche die Multiplikatormethode von Lagrange benützt. Dabei wird gezeigt, daß unter geeigneten Bedingungen die von charakteristischen Kurven erzeugten Hyperflächen die Lösung der partiellen Differentialgleichung liefern.

Robert Sauer.

Urabe, Minoru: On solutions of the linear homogeneous partial differential equations in the vicinity of the singularity. II. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 14, 195—207 (1950).

Per l'equazione lineare alle derivate parziali del primo ordine $\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ nel campo analitico, supposto che le X_i siano regolari e nulle nell'origine, l'A. studia gli integrali nell'intorno dell'origine, nell'ipotesi che gli autovalori della matrice

jacobiana delle X_1, \dots, X_n rispetto alle x_1, \dots, x_n nell'origine verifichino la condizione detta di Picard. Gianfranco Cimmino.

Donder, Th. de: Simplification de la méthode d'intégration d'Hadarnard. II. Bull. Cl. Sci., Acad. Belgique, Bruxelles, V. S. 36, 545—547 (1950).

Zwirner, Giuseppe: Sull' integrazione di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali. Ann. Triestini, Sez. II 17, 41—52 (1947).

L'A. estende, utilizzando il calcolo delle matrici, il classico metodo di Laplace e relativo all'equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y) z = 0$$

ai sistemi del tipo

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial x \partial y} + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, y) \frac{\partial z_j}{\partial x} + \sum_{j=1}^n b_{ij}(x, y) \frac{\partial z_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^n c_{ij}(x, y) z_j = 0.$$

Luigi Amerio.

John, Fritz: The fundamental solution of linear elliptic differential equations with analytic coefficients. Commun. pure appl. Math. 3, 273—304 (1950).

Si abbia l'equazione lineare alle derivate parziali nell'incognita $u(x_1, \dots, x_n)$

(1) $L[u] = \sum_{k=0}^m F_k(D_1, \dots, D_n) u = 0$ ($n > 1, m > 0$), ove F_k è una forma di grado k nei simboli $D_i = \partial/\partial x_i$, con coefficienti funzioni analitiche di x_1, \dots, x_n . Si suppone la (1) di tipo ellittico, cioè che la forma $F_m(\xi_1, \dots, \xi_n)$ sia definita. — L'A. dimostra l'esistenza di una soluzione fondamentale $u = K(x, z)$, con polo in z , tale cioè che risulti, per ogni funzione $v(x)$, $v(z) = \int_{R'} u \bar{L}[v] dx + \int_{B'} M[u, v] dS_x$

ove R' è il dominio di integrazione, B' la frontiera, \bar{L} ed M gli operatori che compaiono nella formula di Green $\int_{R'} (v L[u] - u \bar{L}[v]) dx = \int_{B'} M[u, v] dS_x$.

Luigi Amerio.

• **Vekua, I. N.:** Neue Methoden zur Lösung elliptischer Gleichungen. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1948. 296 S. 14,— R. [Russisch].

The first chapter of this monograph, which summarizes results by its author and his collaborators, deals with the differential equation

$$(1) \quad \Delta u + a u_x + b u_y + c u = 0,$$

where a, b and c are supposed to be analytic functions of x and y in a region D of the plane. With $z = x + i y$ and $\bar{\zeta} = x - i y$ it takes the form (2) $u_{z\bar{\zeta}} + A u_z + B u_{\bar{\zeta}} + C u = 0$, where because every solution of (1) is analytic, we may consider z and $\bar{\zeta}$ as independent complex variables varying in certain regions D and \bar{D} respectively. As for real variables it can be proved that a Riemann function $G = G(z, \bar{\zeta}, t, \tau)$ of (2) exists with the properties $G_{z\bar{\zeta}} - (AG)_z - (BG)_{\bar{\zeta}} + CG = 0$, $G_{\bar{\zeta}} = AG$, ($z = t$), $G_z = BG$, ($\bar{\zeta} = \tau$), $G = 1$, ($z = t, \bar{\zeta} = \tau$) where $t \in D$ and $\tau \in \bar{D}$ are given complex values. With the aid of Riemann's classical representation formula it is shown that for a simply connected D , (3) $u(z, \bar{\zeta}) = H(\varphi(z)) + H^*(\varphi^*(\bar{\zeta}))$ where φ and φ^* are arbitrary analytic functions and

$$H(\varphi(z)) = G(z, \bar{\zeta}_0, z, \bar{\zeta}) \varphi(z) - \int_{z_0}^z \varphi(t) \left(\frac{\partial}{\partial t} - B(t, \bar{\zeta}_0) \right) G(t, \bar{\zeta}_0, z, \bar{\zeta}) dt,$$

$$H^*(\varphi^*(\bar{\zeta})) = G(z_0, \bar{\zeta}, z, \bar{\zeta}) \varphi^*(\bar{\zeta}) - \int_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}} \varphi^*(\tau) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - A(z_0, \tau) \right) G(z_0, t, z, \bar{\zeta}) d\tau$$

represents the most general solution for (2). When $a = b = c = 0$, then $G = 1$ and the formula reduces to $u = \varphi + \varphi^*$. Putting $\bar{\zeta} = \bar{z}$ and $\bar{\zeta}_0 = \bar{z}_0$ we get $u = u(x, y)$ for real values of x and y . When a, b, c and u are real (3) can be written in the form

$$(4) \quad u(x, y) = \Re \left(G(z, \bar{z}_0, z, \bar{z}) \varphi(z) - \int_{z_0}^z \varphi(t) \left(\frac{\partial}{\partial t} - B(t, \bar{z}_0) \right) G(t, \bar{z}_0, z, \bar{z}) dt \right).$$

A number of variants of (3) are also given, including such valid in multiply connected regions. Some special cases are worked out explicitly. — In chapter 2 the formula (3) is used to reduce the approximation of solutions of (1) by certain standard solutions to the approximation of analytic functions by polynomials. The third chapter deals with the following general boundary value problem (A). Find a real solution u of (1) with real a , b and c in a bounded region T with well-behaved boundary L such that

$$(5) \quad \sum_{i+k \leq n} \left(a^{ik}(t) u_{ik}^+(t) + \int_L b^{ik}(t, t_1) u_{ik}^+(t_1) ds \right) = f(t)$$

where $u_{ik} = \partial^{i,k} u / \partial x^i \partial y^k$, $u_{ik}^+(t)$ is the boundary value of u_{ik} at the point t of L and a^{ik} , b^{ik} and f are given real functions on L . Particular cases are Dirichlet's problem and Poincaré's problem. The method of solution is the following. Assuming that T is simply connected and contains the origin, putting $H_0(z) = G(z, 0, z, \bar{z})$, $H(z, t) = (-\partial/\partial t + B(z, 0)) G(t, 0, z, \bar{z})$, we may according to (4) try to write the solution in the form $u = \Re \left(H_0(z) \varphi(z) + \int_0^z H(z, t) \varphi(t) dt \right)$,

($\varphi(0) = \overline{\varphi'(0)}$) and the boundary condition (5) gives for the unknown function φ ,

$$(6) \quad \Re \sum_n \left(a_k(t) \varphi^{(k)}(t) + \int_L b_k(t, t_1) \varphi^{(k)}(t_1) ds \right) = f(t)$$

where a_k and b_k are certain functions. First Dirichlet's problem is treated. The function φ is written in the form $\int_L \mu(t) ds / (t - z)$ where μ is a real function on L and then (6) reduces to a singular Fredholm equation for μ . The method requires $u^+ = f$ to be Hölder continuous (but can be modified to take care of the continuous case but then it is carried out in full only when Dirichlet's problem has a unique solution). It is extended to multiply connected regions. The general problem (A) with $n > 0$ is solved with similar methods. The function $\varphi(z)$ is written in the form $\int_L \left(\left(1 - \frac{z}{t}\right)^{n-1} \log \left(1 - \frac{z}{t}\right) + 1 \right) \mu(t) ds$ with real μ and then (6) reduces to a

(singular) integral equation for μ . — The fourth chapter brings an extension to systems of equations with analytic coefficients

$$\Delta u_i + \Sigma (a_{ik}(u_k)_x + b_{ik}(u_k)_y + c_{ik} u_k) = 0,$$

($i, k = 1, \dots, n$), and the fifth an extension to equations

$$\Delta^n u + \sum_1^n L_k (\Delta^{n-k} u) = 0,$$

where L_k is a linear differential operator with analytic coefficients of order k , in particular to the equation $\Delta^n u = 0$. The sixth chapter contains applications to various problems in elasticity.

Lars Gårding.

Vekua, I. N.: Über eine Darstellung der Lösungen von Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 11, 137—141 (1950) [Russisch].

The author carries through his (modified) treatment of Dirichlet's problem (see the preceding review) also in the case when the solution is not unique.

Lars Gårding.

Inoue, Masao: On the growth of subharmonic functions and its applications to a study of the minimum modulus of integral functions. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 1, 71—82 (1950).

Sei D ein Gebiet der z -Ebene, dessen Rand R den Punkt $z = \infty$ enthält, $E = \bigcup_{z \in R} |z|$, $U(z)$ eine in D subharmonische Funktion, welche der Bedingung

$\limsup_{z \rightarrow z' \in R} U(z) \leq f(|z'|)$ genügt, wobei $f(r)$ mit r gegen ∞ strebe. Verf. untersucht

unter Anwendung einer Abschätzung von A. Beurling den Zusammenhang zwischen dem Wachstum von U , demjenigen von f und den oberen und unteren log. Dichten von E . Dann wird für den Fall $R = E$ bei vorgegebenen stetigen Randwerten $f(r)$ das verallgemeinerte Dirichletsche Problem betrachtet. Verf. beweist u. a. die Existenz einer Lösungsfunktion und diskutiert deren Wachstum für den Fall, daß $\mu E > 2\sigma$, wobei $\mu E =$ untere log. Dichte von E , $\sigma = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log f(r)}{\log r}$.

Schließlich gewinnt Verf. aus den vorangehenden Resultaten Sätze über das Anwachsen des Minimalbetrages einer ganzen analytischen Funktion der Ordnung $\varrho < \frac{1}{2}$.
Alfred Huber.

Inoue, Masao: On functional determination of the stability of Dirichlet's problem. *Math. Japon.* **1**, 164—167 (1949).

Let D be a finite domain of boundary B in the 3-dimensional space, F the family of all continuous functions on B and $L(f)$ a functional on F which satisfies the conditions: 1° for f and g of F , $L(f+g) = L(f) + L(g)$, 2° for any real number α , $L(\alpha f) = \alpha L(f)$, 3° for $f \geq 0$, $L(f) \geq 0$, 4° there exists a point P of D , independent of variable Q of $C(D)$, such that $L(f_Q) = 1/PQ$. The author proves: In order that there exist only one functional $L(f)$ satisfying 1°—4° it is necessary and sufficient that D should be stable. We have then $L(f) = H_f^D(P)$ where $H_f^D(P)$ is the generalized solution of the Dirichlet's problem for D and f . *Jerzy Gorski.*

Conti, Roberto: Sul problema di Cauchy per l'equazione $y^{2\alpha} k^2(x, y) z_{xx} - z_{yy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$, con i dati sulla linea parabolica. *Ann. Mat. pura appl.*, Ser. III **31**, 303—326 (1950).

L'A. étudie le problème de Cauchy pour l'équation indiquée, les conditions initiales étant $z(x, 0) = \varphi(x)$, $z_y(x, 0) = \psi(x)$, $a \leq x \leq b$. Il démontre que dans une certaine région du demi-plan $y \geq 0$, ce problème possède une et une seule solution. — Le cas $\alpha = \frac{1}{2}$, $k \equiv 1$, $f \equiv 0$ a été étudié par Tricomi; celui où $\alpha = \frac{1}{2}$, $k = k(y)$, f linéaire et homogène en z, z_x, z_y , par F. I. Frankl. L'A. suppose $0 < \alpha < 1$, f non linéaire; k, f, φ, ψ sont assujettis à des hypothèses convenables, cependant très générales. — Le problème est alors ramené à l'étude d'un système d'équations intégrales non linéaires du type de Volterra, en les inconnues z, z_x, z_y ; l'A. détermine la solution de ce système par la méthode des approximations successives de Picard-Peano et montre que cette solution, ainsi que ses dérivées premières, est continue en les données initiales φ et ψ . — L'A. montre ensuite par un exemple que la seule continuité de f n'est pas en général suffisante pour assurer la continuité de la solution.
Florent Bureau.

Salechov, G. S.: Über das Cauchy-Kowalewskische Problem für eine Klasse linearer partieller Differentialgleichungen im Bereich der beliebig glatten Funktionen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR*, Ser. mat. **14**, 355—366 (1950) [Russisch].

Fortführung einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **31**, 28). In der dort untersuchten Differentialgleichung $\partial^2 z / \partial t^2 - \varepsilon t^m \partial^2 z / \partial x^2 = 0$, $\varepsilon = \pm 1$, $m = 1, 2, \dots$, mit der Anfangsbedingung $\partial^k z / \partial t^k|_{t=0} = \varphi_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, p-1$, hat man jetzt in $z(t, x)$ unter x ein System von Veränderlichen x_1, \dots, x_s aus einem abgeschlossenen Bereich $g \ni (x_1, \dots, x_s)$ zu verstehen,

und die Ableitung $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ ist durch den Differentialoperator $D = \sum_{\lambda} A_{\lambda_1, \dots, \lambda_s} \frac{\partial^{\lambda}}{\partial x_1^{\lambda_1} \dots \partial x_s^{\lambda_s}}$, $\sum_{i=1}^s \lambda_i = \lambda$, mit gegebenen konstanten Koeffizienten zu ersetzen. Die Problemstellung ist die

gleiche. In Verallgemeinerung des früheren Ergebnisses wird mit Hilfe von Reihenentwicklungen und an ihnen ausgeführten Abschätzungen der Satz bewiesen: Damit die Gleichung in der Umgebung von $t = 0$ eine bezüglich t analytische Lösung hat, ist notwendig und hinreichend, daß die Funktionen $\varphi_k(x)$ im Bereich g bezüglich des Operators D zu einer Klasse $\alpha \leq p$ in einem neuen Sinn gehören (falls $\alpha < p$ ist, ist die Lösung eine ganze Funktion von t), d. h. sie sind beliebig oft differenzierbar, und es gilt für jede von ihnen $|D^n \varphi| \leq M n!^\alpha / H^n$ für alle n . Das ist eine Verallgemeinerung der Jevreyschen Definition der Klasse einer im allgemeinen

nicht analytischen Funktion: $|\partial^n \varphi / \partial x_1^{n_1} \dots \partial x_s^{n_s}| \leq M n!^\alpha / H^n$ mit $\sum_{i=1}^s n_i = n, \alpha > 0$, für alle

n mit geeigneten Konstanten M und H . Die analytische Lösung hat die Eigenschaft, daß der Operator D beliebig oft auf sie anwendbar ist und daß sie in einem geeigneten, an $t = 0$ angrenzenden abgeschlossenen Bereich in bezug auf diesen Operator auch der Klasse $\alpha \leq p$ angehört, also die gleiche Eigenschaft wie die Funktionen $\varphi_k(x)$ besitzt. Sie ist ferner in diesem Bereich bei den gegebenen Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt. Daraus ergibt sich die Folgerung, daß, falls die Funktionen $\varphi_k(x)$ im Bereich g zu einer Klasse α gehören, die nicht größer als das „Gewicht“ $p/\max \lambda_i$ der Gleichung ist, dieses hinreichend für die Analytizität der Lösung ist.

Erik Svenson.

Smolickij, Ch. L.: Einige Integralabschätzungen für die Ableitungen der Lösungen der Wellengleichung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 73, 279—282 (1950) [Russisch].

Sei Ω ein Gebiet des n -dimensionalen Raumes y_1, \dots, y_n mit einer genügend glatten Begrenzung S . $u(y_1, \dots, y_n, t)$ sei l -mal stetig differenzierbar in $\bar{\Omega}$, $t \geq 0$, genüge der Wellengleichung

$\square u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(y, t)$ und habe die Randwerte $u|_S = \psi(y, t)$ und die Anfangswerte $u|_{t=0} = u_0$, $\partial u / \partial t|_{t=0} = u_1$. Es bezeichnet: $F_k(t)$, U_k^0 , U_k^1 die Integrale über Ω der Summe der Quadrate aller Ableitungen bis zur k -ten Ordnung einschließlich von $f(y, t)$ nach y_i und t bzw. von u_0 und u_1 nach y_i ;

$$\Psi_k(t) = \int_S \sum_{m=0}^k \sum_{s=0}^m \sum_{i_1, \dots, i_{m-s}=1}^{n-1} \left[\frac{\partial^m \psi}{\partial t^s \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{m-s}}} \right]^2 dS,$$

wo x_1, \dots, x_n ein örtliches cartesisches Koordinatensystem bedeutet, das in jedem Punkt von S eingeführt ist mit x_n in Richtung der äußeren Normalen;

$$J_{r, \alpha} = \int_{\Omega} \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \left[\frac{\partial^{r+\alpha} u}{\partial t^\alpha \partial y_{i_1} \dots \partial y_{i_r}} \right]^2 d\Omega.$$

Bewiesen wird in der Arbeit für einen positiven Wert von t_0 die Abschätzung

$$\max_{0 \leq t \leq t_0} J_{r, \alpha} \leq A_k(t_0) \max [U_0^k, U_1^{k-1}, \max F_k(t), \max \Psi_{k+1}(t)],$$

wo $A_k(t_0)$ nicht von der Wahl der Funktion u abhängt ($0 \leq r + \alpha \leq k < l$), also speziell für $f = 0, \psi = 0$: $\sup_{0 \leq t < \infty} J_{r, \alpha}(t) \leq A_k \max [U_0^k, U_1^{k-1}]$ in Verallgemeinerung eines Ergebnisses (Fall $k = 2$) von Sobolev [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 48, Nr. 8 u. 9 (1945)]. Mit Hilfe dieser Abschätzung kann die vorgelegte Randwertaufgabe durch einen Grenzübergang gelöst werden, ausgehend von genügend glatten Lösungen, da sie als Abschätzung der Norm eines vollständigen Funktionensystems angesehen werden kann. Erik Svenson.

Smolickij, Ch. Z.: Eine Randwertaufgabe für die Wellengleichung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 73, 463—466 (1950) [Russisch].

Untersucht wird die Randwertaufgabe der Wellengleichung

$$\square u = \Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x_1, \dots, x_n, t), \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

für einen n -dimensionalen Bereich $\bar{\Omega}$ mit dem Rand S und für $t \geq 0$ bei den Anfangsbedingungen $u|_{t=0} = u_0(x_1, \dots, x_n)$, $\partial u / \partial t|_{t=0} = u_1(x_1, \dots, x_n)$ und der Randbedingung $u|_S = \psi(x_1, \dots, x_n, t)$. Von S wird vorausgesetzt, daß die Maxima der Ableitungen der Eigenlösungen der Gleichung $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ mit $u|_S = 0$ in $\bar{\Omega}$ nicht schneller als eine Potenz des Eigenwertes wachsen. f, u_0, u_1, ψ sind als beliebig oft differenzierbare Funktionen vorgegeben und sollen untereinander den Bedingungen der Übereinstimmung am Rande zur Zeit $t = 0$ von beliebig hoher Ordnung (d. h. für beliebig hohe zeitliche Ableitungen von ψ unter Heranziehung der Differentialgleichung) genügen. Dann existiert eine Lösungsfunktion, die beliebig oft differenzierbar ist. — Verf. deutet eine Lösung dieser allgemeinen Aufgabe an durch direkte Konstruktion der Lösung mit Hilfe einer Greenschen Funktion

$$G_h(P, Q, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_m(P, h) v_m(Q)}{\lambda_m} \sin \lambda_m t \cdot v_m(P) \text{ und } \lambda_m \text{ sind die Eigenfunktionen und}$$

Eigenwerte der vorhin erwähnten Hilfspgleichung und $v_m(P, h)$ Mittelbildungen von $v_m(P)$ mit einem Kern $\omega_h(P, Q)$, der nur für $|P, Q| < h$ von Null verschieden, beliebig oft differenzierbar ist und für den $\int_{\Omega} \omega_h(P, Q) d\Omega_Q = 1$ gilt. Im

weiteren schließt sich der Verf. an die Begriffsbildungen von Sobolev (dies. Zbl. 22, 148) über verallgemeinerte Ableitungen und Lösungen an und zeigt, daß, falls f, u_0, u_1, ψ quadratisch summierbare verallgemeinerte Ableitungen besitzen, jeweils bis zur Ordnung $\alpha, \beta, \beta - 1, \gamma$, und die Bedingungen der Übereinstimmung am Rande für $t = 0$ fast überall bis zur Ordnung $\delta = \min(\alpha, \beta - 1, \gamma)$ mit $\delta \geq 1$

erfüllen und außerdem u im Bereich $(\Omega, \langle 0, t_0 \rangle)$ (t_0 — eine beliebige endliche Zahl) der Klasse W_2^k angehört, es nur eine verallgemeinerte Lösung $u \in W_2^{\delta-1}$ gibt.

Erik Svenson.

Tichonov, A.: Über Randbedingungen, die Ableitungen von einer Ordnung enthalten, die höher ist als die Ordnung der Gleichung. Mat. Sbornik, n. Ser. 26 (68), 35—56 (1950) [Russisch].

Die Arbeit befaßt sich mit einer ausführlichen Untersuchung der Wärmeleitungsgleichung (1) $\partial^2 u / \partial x^2 = \partial u / \partial t$ ($0 \leq x < \infty, t \geq 0$) bei der Anfangsbedingung $u(x, 0) = 0$ und der Randbedingung $\sum_{k=0}^m \alpha_k \frac{\partial^k u(0, t)}{\partial x^k} = f(t)$, α_k — Konstanten $\alpha_0 \neq 0, \alpha_m \neq 0, f(t)$ — stückweise stetig.

Gesucht wird eine im Unendlichen beschränkte Lösung, die samt ihren Ableitungen bis zur m -ten Ordnung überall stetig ist mit Ausnahme der Unstetigkeitspunkte von $f(t)$, wo die höchste Ableitung $u^{(m)}(x, t)$ unstetig sein kann, aber beschränkt bleiben soll. Ohne Einschränkung kann m gerade vorausgesetzt werden. Für eine äquivalente Integro-Differentialgleichung

$$(2) \quad \alpha_0 \varphi(t) - \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \alpha_2 \varphi'(t) - + \dots - \frac{\alpha_{m-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi^{(m/2)}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \alpha_m \varphi^{(m/2)}(t) = f(t)$$

für die Randfunktion $\varphi(t) = u(0, t)$, die ihrerseits einer gewöhnlichen Differentialgleichung für die Hilfsfunktion $z(t) = \varphi^{m/2}(t)$ (das bedeutet ein $m/2$ -faches Integral mit den unteren Grenzen 0) (3) $A_0 z^{(m)} + A_1 z^{(m-1)} + \dots + A_m z = F(t)$, wo die Konstanten A_k und die Funktion $F(t)$ sich aus den gegebenen Daten ergeben, gleichbedeutend ist, wird folgende allgemeine Lösung gewonnen:

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^m \beta_i \int_0^t \psi(q_i^2(t-\tau)) f(\tau) d\tau \text{ mit } \psi(z) = e^{-z} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} e^{-x^2} dx - 1 \right) + \frac{1}{\sqrt{\pi z}}.$$

Hierin bedeuten: β_i gewisse berechenbare Konstanten, q_i die Wurzeln der vom Verf. genannten charakteristischen Gleichung $\sum_{k=0}^m \alpha_k q^k = 0$ der vorgelegten Aufgabe. Ihre Quadrate

q_i^2 erweisen sich als die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Differentialgleichung (3). Daraus ergibt sich dann durch Vergleich mit der bekannten Lösung der Randwertaufgabe im Falle der einfachsten Randbedingung $-\partial u / \partial x + u = f(t)$ als eindeutig bestimmte Lösung

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{q_i^2} \cdot \frac{q_i}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left\{ e^{-x^2/4(t-\tau)} - q_i \int_0^\infty e^{-q_i \xi - (x+\xi)^2/4(t-\tau)} d\xi \right\} \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Die ganzen Entwicklungen bleiben im Rahmen der gewöhnlichen Integralrechnung. Höhere Hilfsmittel werden nicht

herangezogen. Zum Übergang von (2) zu (3) wird ein Integraloperator $L(\psi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$

verwandt, der dadurch von Interesse ist, daß seine zweimalige Ausübung das Integral $\int_0^t \psi(\tau) d\tau$

ergibt, so daß es berechtigt ist, ihn mit $\psi^{(-1/2)}(t)$ zu bezeichnen. — In einem zweiten Teil wird dann auf direktem Wege das Verhalten der Lösung bei $t \rightarrow \infty$ untersucht. $u(x, t)$ wird im Unendlichen stabil genannt, wenn es dabei einem endlichen Grenzwert zustrebt. Folgender Satz wird bewiesen: Damit die Funktion $\varphi(t)$ und damit die Lösung der betrachteten Randwertaufgabe für jede Funktion $f(t)$, die selbst bei $t \rightarrow \infty$ einem endlichen Grenzwert zustrebt, stabil im Unendlichen ist, ist notwendig und hinreichend, daß für alle Wurzeln q_i der charakteristischen Gleichung der Aufgabe gilt: $-\frac{3}{4}\pi < \arg q_i < +\frac{3}{4}\pi$. Beim Beweis wird zunächst vorausgesetzt, daß die charakteristische Gleichung keine mehrfachen oder entgegengesetzt gleichen Wurzeln hat, wobei dann insbesondere $\varphi(\infty) = \alpha_0^{-1} f(\infty)$ stattfindet, welche Einschränkung am Schluß beseitigt wird. Erfüllen die Wurzeln q_i die Bedingung nicht, so gibt es Funktionen $f(t)$, für welche die Lösungen bei $t \rightarrow \infty$ nicht gegen endliche Grenzwerte streben, und solche, für welche das wohl der Fall ist.

Erik Svenson.

Bourgin, D. G.: Two problems of mixed type for the damped wave equation. Quart. appl. Math. 6, 279—299 (1948).

L'A. considera l'equazione (1) $z_{tt} - z_{xx} + z = 0$ ed introduce nel piano una metrica iperbolica, definita da: $d\sigma^2 = dt^2 - dx^2$, nella quale le linee di lunghezza nulla sono le rette caratteristiche della (1): $x + t = \text{cost.}$, $x - t = \text{cost.}$; detti conormali due vettori normali in tale metrica, se Γ è una curva rettificabile,

la direzione conormale rispetto al vettore tangente a Γ è indicata con ν . — L'A. risolve per la (1) due problemi di tipo misto e cioè: „Determinare un integrale della (1) che soddisfa le seguenti condizioni (A) $z_\nu = \gamma(x, t)$ sulla retta $x = l$ nel caso del primo problema, $z_\nu = \gamma(x, t)$ sulla retta $t + \lambda x = \lambda l$ ($\lambda > 1$) nel caso del secondo problema, (B) $z = A(x)$, $z_t = B(x)$ per $t = 0$, (C) $z_\nu = h z(x, t) + \psi(x, t)$ sulla retta $t + \lambda x = 0$, dove $\gamma(x, t)$, $A(x)$, $B(x)$, $\psi(x, t)$ sono funzioni assegnate, e h è una costante assegnata (supposta ≥ 0). — L'integrale $z(x, y)$ richiesto è posto nella forma $z = z^A + z^B + z^C$, dove z^A , z^B , z^C sono tre integrali della (1), che soddisfano condizioni ottenute dalle date, ponendo uguali a zero alcune delle funzioni assegnate; l'A. sviluppa i calcoli per determinare una soluzione $z(x, y)$ della (1), che soddisfa le condizioni: $z_\nu = 0$ sulla retta $x = l$ (oppure $t + \lambda x = \lambda l$), $z = z_t = 0$ per $t = 0$, $z_\nu = h z(x, y) + \psi(x, y)$ sulla retta $t + \lambda x = 0$, supponendo $\psi(x, y)$ continua colla sua derivata prima. L'A. perviene alla soluzione in forma esplicita, applicando il metodo di Riemann (la funzione di Riemann è data esplicitamente) e il metodo delle immagini (rispetto alla metrica iperbolica introdotta), e facendo poi uso della trasformazione di Laplace. — I metodi usati sono estesi all'equazione: $z_{tt} - z_{xx} - z = 0$.

Maria Cinquini-Cibrario.

Fichera, Gaetano: Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 4, 35—99 (1950).

In questa importante Memoria l'A. risolve alcuni classici problemi al contorno per l'equazione dell'elasticità: (1) $\Delta_2 u + k \operatorname{grad} \operatorname{div} u = f$ in un dominio D , di frontiera FD ($k = \text{cost.}$, f vettore assegnato in D). Precisamente, posto

$$(2) \quad L[u] = (k - \lambda) \operatorname{div} u \cdot \nu + (1 + \lambda) du/d\nu + \lambda (\nu \wedge \operatorname{rot} u)$$

($\lambda = \text{cost.}$, ν normale interna a FD) l'A. dimostra l'unicità e l'esistenza della soluzione u di (1), in D , nei seguenti problemi: a) è assegnato il vettore u su FD , b) è assegnato il vettore $L[u]$ su FD , c) è assegnato u su una parte, $F_1 D$, di FD ed $L[u]$ sulla rimanente parte, $F_2 D$. — Il procedimento dell'A. si inserisce nei metodi generali del Picone (Appunti di analisi superiore, Napoli 1940; questo Zbl. 24, 23), fondati sull'interpretazione data dal Picone alla prima formula di Green. — L'A. riesce inoltre a dimostrare la completezza dei sistemi di funzioni da Lui considerate valendosi della seconda formula di Green (da cui seguono i classici teoremi di unicITÀ) e di alcune estensioni sia della teoria dei potenziali di Evans e Miles [Amer. J. Math. 53, 493—516 (1931)] che dei teoremi di inversione delle formule fondamentali di Green dati dal censore (questo Zbl. 34, 202).

Luigi Amerio.

Picone, Mauro und Gaetano Fichera: Neue funktionalanalytische Grundlagen für die Existenzprobleme und Lösungsmethoden von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen. Monatsh. Math. 54, 188—209 (1950).

In questa Memoria è esposto, in forma assai generale, il metodo di integrazione del Picone, fondato sull'uso diretto delle formule di Green. Viene considerato il caso dei sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali, ai quali sono estese le formule di Green, e si indica inoltre come i più generali problemi di frontiera vengano tradotti in equazioni integrali di prima specie, le cui soluzioni implica la conoscenza di sistemi di funzioni soddisfacenti a requisiti di completezza che vengono precisati. È trattato anche un problema relativo a equazioni integrodifferenziali e, infine, vengono enunciati alcuni recenti teoremi di esistenza, dovuti al Fichera, per le equazioni dell'elasticità (v. ref. prec.).

Luigi Amerio.

Nazarov, A. G.: Die biharmonische Gleichung in Konturableitung. Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady 11, 7—8 (1949) [Russisch].

Variationsrechnung:

Cinquini, Silvio: Sopra l'estremo assoluto degli integrali doppi in forma ordinaria. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. Ser. 39, 249—260 (1949).

Für Extremalintegrale $J_D[z] = \int_D F(x, y, z, p, q) dx dy$ hat L. Tonelli in seiner grundlegenden Arbeit (dies. Zbl. 6, 118) Bedingungen der Existenz des absoluten Extremums gegeben. Er und seine Nachfolger haben die Voraussetzung gemacht, daß F nach unten beschränkt ist. Davon befreit sich Verf. und gewinnt diesbezüglich zwei Existenzsätze. Der erste bezieht sich unter geeigneten weiteren Voraussetzungen auf die Klasse K der Funktionen $z(x, y)$, die im gleichen Grade beschränkt und stetig sind auf der Begrenzung des Gebietes D . Der zweite Satz bezieht sich im Gegensatz dazu auf die Klasse K_0 der Funktionen, die an einem Punkt (x_0, y_0) von D in ihrer Gesamtheit einer Bedingung $|z(x_0, y_0)| < L$ genügen. — Die Beweismethode des Verf. besteht in der (bei K_0 keineswegs einfach zu bewerkstellenden) Aufstellung einer geeigneten Unterklasse, deren Funktionen die Bedingung der gleichgradigen Stetigkeit erfüllen, welche die Grundlage der Tonellischen Untersuchung ist.

Ernst Hölder.

Faedo, Sandro: Il calcolo delle variazioni per gli integrali su intervalli infiniti. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 8, 94—125 (1949).

L'A. considère l'ensemble (K) des courbes ordinaires $C[y_1(x), \dots, y_n(x)]$ telles que a) les fonctions $y_i(x)$ sont absolument continues, ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$, pour tout $x \geq a$; b) $y_i^{(r)} = c_i^{(r)}$; $i = 1, 2, \dots, n$; $r = 0, 1, \dots, m-1$; c) l'intégrale de Lebesgue $\int_a^x f(x, y_i, y_i', y_i'', \dots, y_i^{(m)}) dx$ converge vers une valeur finie $I_\infty(C)$, pour $x \rightarrow +\infty$; f est une fonction continue ainsi que les dérivées secondes $f_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}}$; $i, j = 1, 2, \dots, n$; $r, s = 0, 1, \dots, m$, pour $x \geq a$ et pour tout système de valeurs des y_i, y_i', \dots . — Une courbe C est de classe s lorsqu'elle possède, sur tout segment $[a, a+X]$, des dérivées finies jusqu'à l'ordre s . Une courbe C de (K) pour laquelle la borne sup. ou la borne inf. de $I_\infty(C)$ est atteinte est dite une extrémante de $I_\infty(C)$ dans (K) . Toute extrémante, de classe m , est nécessairement une extrémale c'est-à-dire une solution de l'équation d'Euler: $f_{y_i} - \frac{d}{dx} \left\{ f_{y_i'} - \frac{d}{dx} \{ f_{y_i''} - \dots \} \right\} = 0$. Soient $C[y_i(x)]$, $C'[y_i + \delta y_i]$ deux courbes ordinaires; si l'intégrale $\delta I_\infty(C) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_i \sum_r f_{y_i^{(r)}} \delta y_i^{(r)} \right) dx$, où $\frac{d^r}{dx^r} \delta y_i = \delta y_i^{(r)}$, est convergente, $\delta I_\infty(C)$ est appelée la variation première de $I_\infty(C)$ le long de C , relativement à δC . La variation première pour laquelle, $\delta y_i = \dots = \delta y_i^{(m)} = 0$, pour $x = a$ est notée $\bar{\delta}_\infty I(C)$; si de plus, l'on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta y_i^{(r)} = 0$, la variation sera notée $\bar{\delta}_\infty I(C)$. Si $\bar{\delta}_\infty I(C) \equiv 0$ pour C de classe m , C est nécessairement une extrémale. Contrairement à ce qui se passe dans le cas d'une intégrale étendue à un intervalle fini, la réciproque n'est pas vraie. L'A. donne une condition suffisante pour qu'une extrémale, ordinaire pour $I_\infty(C)$, donne lieu à $\bar{\delta}_\infty I(C) = 0$. Si pour tout $x \geq a$ et pour tout système fini (y_i, y_i', \dots) la matrice $(f_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}})$ est définie positive; si la forme quadratique, en les variables $v_{i,r}, v_{j,s}$: $(\varphi) \sum_{i,j} \sum_{r,s} f_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} v_{i,r} v_{j,s}$ est semi-définie positive et s'il existe, dans (K) , une extrémale C , elle sera unique et $\delta I(C) \equiv 0$; C sera une extrémante de $I_\infty(C)$ dans (K) . — L'A. donne une condition suffisante pour que $\delta_\infty I(C)$ converge. Désignons par C' une courbe ordinaire telle que, pour toute $C' + \delta C$ ordinaire, il existe $\lambda < 0$ tel que $C' + \lambda \delta C$ soit ordinaire pour $I_\infty(C)$. S'il existe $k \geq a$, tel que pour tout $x \geq k$ et pour tout système fini (y_i, y_i', \dots) la forme quadratique (φ) est semi-définie positive, $\delta_\infty I(C')$ sera convergente. L'A. donne également un critère, dans le cas particulier où l'équation d'Euler est linéaire, pour qu'une extrémante C de $I_\infty(C)$ dans (K) donne lieu à $\delta I_\infty(C) \equiv 0$.

Th. Lepage.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

● Vekua, N. P.: Systeme von singulären Integralgleichungen und einige Randwertaufgaben. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für techn.-theor. Lit. 1950. 252 S. [Russisch].

Charazov, D. F.: Über die Verteilung der Eigenwerte von Integralgleichungen mit bezüglich des Parameters rationalen Kernen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 71, 1033—1035 (1950) [Russisch].

Es wird auf elementarem Wege der Satz bewiesen: Gegeben sei die Integralgleichung

$$u(x) = \int_a^b \left[G_0(x, y) + \lambda \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{m_j} \frac{G_k^{(j)}(x, y)}{(\lambda_r - \lambda_j)^k} \right] u(y) dy,$$

wo $G_0(x, y)$, $G_k^{(j)}(x, y)$ ($k = 1, 2, \dots, m_j$; $j = 1, 2, \dots, p$) reelle symmetrische Funktionen bedeuten, die im Bereich $a \leq x, y \leq b$ quadratisch summierbar sind; $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ bedeuten irgendwelche reelle und p, m_1, \dots, m_p natürliche Zahlen; λ ist ein komplexer Parameter. Ferner gelte

für jede quadratisch summierbare Funktion $\varphi(x)$: $\int_a^b \varphi^2(x) dx - \int_a^b \int_a^b G_0(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy > 0$.

Wenn dann die Kerne $G_k^{(j)}(x, y)$ negativ semidefinit sind, gibt es keine nichtreellen Eigenwerte λ der Integralgleichung, die den Bedingungen genügen: $0 < \arg(\lambda - \lambda_r) \leq \pi/m$, $2\pi - \pi/m \leq \arg(\lambda - \lambda_r) < 2\pi$, wo $m = \max(m_1, \dots, m_p)$, $\lambda_r = \max(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ bedeuten. — Daraus folgt, daß für $m_1 = m_2 = \dots = m_p = 1$ nur reelle Eigenwerte existieren können. Ferner wird der Satz noch etwas abgewandelt. Dann folgen Sätze über Bedingungen, die mindestens einen reellen Eigenwert garantieren; sie werden mit Hilfe der Ergebnisse einer früheren Arbeit des Verf. bewiesen [Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoj SSR, 7, Nr. 7 (1946)]. Das ist z. B. der Fall, wenn die Kerne $G_k^{(j)}(x, y)$ negativ semidefinit sind. Erik Svenson.

Tranter, C. J.: On some dual integral equations occurring in potential problems with axial symmetry. Quart. J. Mech. appl. Math. 3, 411—419 (1950).

Für die dualen Integralgleichungen

$$\int_0^\infty G(u) f(u) J_0(\varrho u) du = g(\varrho) \quad (0 < \varrho < 1), \quad \int_0^\infty f(u) J_0(\varrho u) du = 0 \quad (\varrho > 1)$$

gibt Verf. die formale Lösung $f(u) = u^{-1-k} \sum_{m=0}^\infty a_m J_{2m+k}(u)$, ($k > 0$ frei verfügbar), wobei die a_m gewissen Rekursionsformeln genügen. Von Konvergenzbetrachtungen wird abgesehen, aber die Brauchbarkeit des Lösungsverfahrens am Spezialfall $G(u) = u^{-1} \operatorname{Tang} h u$, $g(\varrho) = 1$ gezeigt. Dieser Fall entspricht der Bestimmung des Potentials einer Kreisscheibe vom konstanten Potential 1, die zwischen zwei geerdete unendliche parallele Platten im Abstand $\pm h$ gestellt wird.

M. J. de Schwarz.

Fréchet, Maurice: Sur certaines équations intégrales que l'on rencontre dans les applications. Bull. Soc. math. Belgique 1948—1949, 33—35 (1949).

In una Memoria del 1934 (Quart. J. Math. 5, 106—144; questo Zbl. 10, 24, 6, 58) l'A. ha studiato il comportamento asintotico della successione dei nuclei iterati relativi a un'equazione integrale di Fredholm. Lo studio delle probabilità „en chaîne“ a cui negli ultimi tempi l'A. si è dedicato, conduce allo stesso problema nel caso particolare in cui il nucleo di Fredholm $K(M, P)$ sia semidefinito positivo tale che $\int_V K(M, P) dP = 1$. L'A. fa osservare che i risultati contenuti nella

sua Memoria del 1934 si semplificano in questo caso particolare. Inoltre egli afferma che per risolvere il problema del comportamento asintotico non è necessario ottenere l'espressione esatta dell' n^{mo} nucleo iterato, ma che d'altra parte può essere interessante di ottenere questa espressione, la quale fa vedere che si può sostituire alla formula ricorrente in cui compaiono i punti variabili M, P di una regione V in uno spazio a r dimensioni: $K^{(n+m)}(M, P) = \int_V K^{(n)}(M, Q) K^{(m)}(Q, P) dQ$, una formula

ricorrente in cui compaiono, in ultima analisi, come variabili numeri interi. Le dimostrazioni e altri risultati si trovano in una Memoria dell'A. del 1936 (J. Math. pur. appl. 15, 251—270; questo Zbl. 15, 114). *Landolino Giuliano.*

Karp, S. N.: Wiener-Hopf techniques and mixed boundary value problems. Commun. pure appl. Math. 3, 411—426 (S 57—S 72) (1950).

An Hand mehrerer Beispiele bei partiellen Differentialgleichungen wird die Parallele zwischen zwei Methoden dargestellt: 1. der Methode der Fouriertransformation für eine Integralgleichung 1. Art vom Wiener-Hopf-Typus $f(x) = \int_0^\infty g(x_0) K(x - x_0) dx_0$ (mit $x > 0$) und 2. der Methode der Trennung der Veränderlichen mit der Darstellung der Lösung in der Form $V = \int_{(C)} A(x) f_\alpha(\xi) g_\alpha(\eta) dx$, wobei $f_\alpha(\xi) g_\alpha(\eta)$ für beliebiges α Lösung der (homogenen) Differentialgleichung ist, der Integrationsweg C in der komplexen α -Ebene geeignet zu wählen ist und so eine Integralgleichung für $A(x)$ entsteht. Verf. gibt Beispiele für das Auftreten von Paaren von Integralgleichungen bei komplizierteren Randbedingungen.

Lothar Collatz.

Agarwal, Ratan Prakash: On self-reciprocal functions involving two complex variables. Ganita 1, 17—25 (1950).

L'A. dimostra varie formule di trasformazione relative alle soluzioni dell'equazione integrale

$$f(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{x u y u'} J_\nu(x u) J_\mu(y u') f(u, u') du du'.$$

Carlo Miranda.

Agranovič, Z.: Über einige Fragen, die mit einer Gleichung von Sturm-Liouville'schem Typus auf der Halbachse zusammenhängen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 66, 1025—1028 (1949) [Russisch].

Es sei $\varphi(x, \lambda)$ die Lösung der Differentialgleichung $\varphi'' - \varrho(x)\varphi + \lambda\varphi = 0$, die den Anfangsbedingungen $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi_x(0, \lambda) = 0$ genügt, und $T_x^y[f] = \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2} + \int_0^\infty w(t, x, y) f(t) dt$ ein verallgemeinerter Verschiebungsoperator mit der Eigenschaft $T_x^y[\varphi(x, \lambda)] = \varphi(x, \lambda)\varphi(y, \lambda)$. Außerdem sei

$\sup_{|x|, |\lambda| < \infty} |T_x^y(f)| < K \sup_{|x| < \infty} |f(x)|$. Die durch die Gleichung $\Phi_f(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\varphi(x, \lambda) dx$ ($0 \leq \lambda < \infty$) definierte Funktion $\Phi_f(\lambda)$ heißt die S - L -Transformierte von $f(x)$ und die abgeschlossene Hülle der Menge aller Punkte $\lambda \geq 0$, wo $\Phi_f(\lambda) \neq 0$ ist, das S - L -Spektrum von $f(x)$. Es werden Verallgemeinerungen des Tauberschen Satzes von N. Wiener angegeben und insbesondere behauptet: Für $f(x) \in L(0, \infty)$ sind die Linearkombinationen der Form $\sum_k c_k T_x^{\tau_k}[f]$, wobei c_k, τ_k beliebige reelle Zahlen sind, dann und nur dann dicht in $L(0, \infty)$, wenn $\Phi_f(\lambda) \neq 0$ gilt für alle $\lambda \geq 0$. Die Arbeit enthält keine Beweise.

Erhard Heinz.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

• **Gersevanov, N. M.: Die Iterationsrechnung und ihre Anwendungen.** Moskau: Maßstrojizdat 1950. 68 S. 3,— Rubel [Russisch].

Das Buch wendet sich vor allem an Ingenieure und setzt nur geringe Vorkenntnisse voraus. Unter Verzicht auf mathematische Strenge wird eine praktische Anleitung zur Lösung gewisser Funktionalgleichungen gegeben. Inhalt: I. Die einfachsten Tatsachen über Iteration. Definition der Iterierten $\varphi_n(x)$ einer Funktion $\varphi(x)$. Einführung nichtganzer Indizes n . Rechnen mit dem Iterationsindex. Graphische Verfahren. II. Lösung von Funktionalgleichungen. $f(\varphi(\alpha)) - f(\alpha) = \Phi(\alpha)$, f gesucht. Ausgehend von einem festen α_0 erhält man die Glei-

chungen $f(q_1(\lambda_0)) \dots f(\lambda_0) = \Phi(\lambda_0), \dots, f(q_n(\lambda_0)) - f(q_{n-1}(\lambda_0)) = \Phi(q_{n-1}(\lambda_0))$. Summation ergibt $f(x) = f(\lambda_0) + \psi(\lambda_0, n)$, wo $x = q_n(\lambda_0)$ gesetzt ist und ψ die Summe der rechten Seiten darstellt. In den beiden letzten Gleichungen wird n als stetig variierender Parameter aufgefaßt. $f(x)$ ist dann — unter gewissen nicht genannten Voraussetzungen — implizit definiert. — Beispiele. Naheliegende Ergänzungen. III. Anwendungen bei der Berechnung von Grundwasserfiltern.

Karl Zeller.

Krasnosel'skij, M. A.: Die Konvergenz der Galerkinschen Methode für nicht-lineare Gleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 73, 1121—1124 (1950) [Russisch].

$L_1 \subset L_2 \subset \dots$ seien endlichdimensionale Unterräume im Banachraum E , $\bigcup L_n$ liege dicht in E . Die P_n seien lineare Projektionsoperatoren mit gleichmäßig beschränkten Normen, es gelte $P_n E = L_n$. Zur Lösung einer Gleichung (1) $\varphi = A \varphi$ ($\varphi \in E$ gesucht) betrachtet Verf. die Näherungsgleichungen (2) $\varphi = P_n A \varphi$. Diese Methode wurde von Galerkin in etwas speziellerer Form verwendet (vgl. Michlin, dies. Zbl. 36, 361; Kantorovic — Kap. II —, dies. Zbl. 34, 212) und stellt eine Verallgemeinerung der Methode von Rayleigh-Ritz dar. Verf. beweist zwei Sätze über die Konvergenz des Verfahrens. Satz 1: A sei vollstetig; (1) habe eine isolierte Lösung φ_0 , deren topologischer Index von Null verschieden ist. Dann besitzen die Gleichungen (2) für $n > N$ Lösungen φ_n , die gegen φ_0 konvergieren. Satz 2: A habe überdies in φ_0 ein Frechet-Differential B , für das 1 nicht Eigenwert ist. Dann gilt $\|\varphi_n - \varphi_0\| \leq (1 + \varepsilon_n) \|P_n \varphi_0 - \varphi_0\|$ mit $\varepsilon_n \rightarrow 0$. — Weiter wird eine Modifikation der Methode besprochen, die von Petrov stammt (dies. Zbl. 24, 91). — Durch Anwendung des Galerkin-Verfahrens auf die Gleichung $\varphi = \|\varphi\| A \varphi$ (A linear) lassen sich Eigenlösungen φ und Eigenwerte $\lambda = \|\varphi\| > 0$ bestimmen.

Karl Zeller.

Alaci, V.: Une classe d'équations fonctionnelles. An. Acad. Republ. Popul. Române, Ser. Mat. Fiz. Chim. 3, 461—473, russische und französ. Zusammenfassgn. 474—475, 476—477 (1950) [Rumänisch].

Verf. betrachtet „verallgemeinerte pseudohomogene“ Funktionen, die durch die Funktionalgleichung

$$(1) \quad f[\varphi_1(t) x, \varphi_2(t) y, \varphi_3(t) z] = \Phi(t) f(x, y, z)$$

definiert sind. Für sie gilt, wie Verf. (Revista mat. Timișoara 3, Nr. 1) gezeigt hat

$$(2) \quad \varphi_1^{x \frac{\partial f}{\partial x}} \cdot \varphi_2^{y \frac{\partial f}{\partial y}} \cdot \varphi_3^{z \frac{\partial f}{\partial z}} = \Phi^f(x, y, z).$$

In dieser Note wird die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung (2) bestimmt für die Fälle, daß die φ_i und Φ Potenzen einer Funktion bzw. Potenzprodukte von zwei oder drei Funktionen sind; falls sie Potenzprodukte von vier Funktionen sind, hat die Gleichung (2) im allgemeinen keine Lösung.

(Aus der französ. Zusammenfassg.)

Aczél, János: Funktionalgleichungen in der angewandten Mathematik. Magyar Tud. Akad. mat. természettud. Oszt. Közleményei 1, 131—142 (1950) [Ungarisch].

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Betonung der Wichtigkeit gewisser Funktionalgleichungen vom Standpunkt der angewandten Mathematik aus. Es werden manche Beispiele besprochen, und durch diese wird illustriert, wie manche Probleme durch Funktionalgleichungen gelöst werden können. So spielt z. B. die Cauchysche Gleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$ eine gewisse Rolle in der Finanzmathematik, da sie eigentlich das Gesetz der Förderung des Anwachsens eines Kapitals bei bekannten Verhältnissen ausdrückt. — Die Lösungen von Funktionalgleichungen vom Typus

$$F(x+y, \varphi+\psi) + F(x+y, \varphi-\psi) = 2[F(x, \varphi) + F(y, \psi)] \cdot F(1, \psi)$$

und

$$F(x+y, \varphi+\psi) + F(x+y, \varphi-\psi) = F[2F(x, \psi), \varphi] + F[2F(y, \psi), \varphi]$$

führen zur Begründung gewisser Probleme der Mechanik. Auch die Fragestellung, in welchem Kraftfeld man den Begriff des Schwerpunktes so definieren kann, daß er die wohlbekannten

Eigenschaften besitze, kann durch Lösung der Funktionalgleichung $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ be-

antwortet werden. Zum Schluß wird durch Lösung von Funktionalgleichungen die in der Statistik und Wahrscheinlichkeitslehre wohlbekannte Poissonsche Verteilungsformel äußerst einfach bewiesen.

Stefan Fenyő.

Succi, Francesco: Sui funzionali analitici invarianti di prolungamento delle funzioni analitiche. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 9, 79—103 (1950).

Si studiano i funzionali analitici (secondo Fantappiè) invarianti di prolungamento, introdotti da G. Calugareano (questo Zbl. 21, 331), i quali sono primitivi di quelli del ciclo chiuso. Pertanto l'A. sviluppa in serie di Fantappiè nell'intorno

dello zero il generico primitivo di un funzionale del ciclo chiuso e rileva, per ogni funzionale derivato di un funzionale definito per funzioni singolari all'infinito, la proprietà che $F^{(n)}[y_0(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, considerato come funzione dei suoi indici di derivazione $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, non è mai singolare nei punti impropri che stanno fuori degli iperpiani coordinati dello spazio proiettivo S_n nel quale vengono rappresentate le n -ple complesse $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Questa proprietà viene stabilita utilizzando la rappresentazione delle n -ple all'infinito introdotta da F. Severi, il quale considera la n -pla all'infinito come un punto improprio di uno spazio proiettivo S_n a n dimensioni complesse; peraltro l'A. nella propria ricerca tiene conto anche del punto di vista di W. E. Osgood, secondo il quale n -pla all'infinito è ogni n -pla in cui almeno uno dei numeri è infinito. — Il risultato più notevole raggiunto dall'A. è che non esistono funzionali analitici non costanti, primitivi di quelli del ciclo chiuso, definiti per funzioni singolari all'infinito e definiti o no per lo zero. — Inoltre l'A. rileva l'esistenza di funzionali, primitivi di quelli del ciclo chiuso e invarianti di prolungamento, definiti per funzioni regolari all'infinito, e infine studia i funzionali analitici lineari invarianti di prolungamento.

Silvio Cinquini.

Varsano, Sami: Sui funzionali analitici lineari del ciclo chiuso delle funzioni di più variabili. *Rend. Mat. e Appl.*, V. Ser. 9, 123—135 (1950).

Viene esteso ai funzionali analitici (secondo Fantappiè) lineari dipendenti da funzioni di più variabili e da più parametri il concetto di funzionale del ciclo chiuso. — Tra i funzionali dipendenti da una funzione di una sola variabile l'A. chiama funzionale del ciclo chiuso ogni funzionale misto $F[y(t); z_1, \dots, z_h] = f(z_1, \dots, z_h)$ tale che, per ogni incremento ω , risulta

$$F[y(t + \omega); z_1, \dots, z_h] = f(z_1 + \omega, \dots, z_r + \omega; z_{r+1}, \dots, z_h)$$

ove $1 \leq r \leq h$; e stabilisce che, se un funzionale è del ciclo chiuso rispetto ai parametri z_1, \dots, z_r , la sua indicatrice emisimmetrica è una funzione dei parametri z_{r+1}, \dots, z_h e delle differenze $z_s - \alpha$ ($s = 1, \dots, r$). Viceversa, un funzionale lineare la cui indicatrice emisimmetrica è una funzione dei parametri z_{r+1}, \dots, z_h e delle differenze $z_s - \alpha$ ($s = 1, \dots, r$) è un funzionale del ciclo chiuso rispetto ai parametri z_1, \dots, z_r . — Un funzionale misto (I) $F[y(t_1, \dots, t_n); z_1, \dots, z_h] = f(z_1, \dots, z_h)$, dipendente dai parametri (II) z_1, \dots, z_h , viene chiamato del ciclo chiuso se per gli incrementi $\omega_1, \dots, \omega_n$ risulta

$$F[y(t_1 + \omega_1, \dots, t_n + \omega_n); z_1, \dots, z_h]$$

$$= f(z_{11} + \omega_1, \dots, z_{1r_1} + \omega_1; \dots; z_{n1} + \omega_n, \dots, z_{nr_n} + \omega_n; z_{q+1}, \dots, z_h),$$

ove è $r_1 + r_2 + \dots + r_n = q \leq h$, e z_{11}, \dots, z_{1r_1} sono r_1 tra le variabili (II); z_{21}, \dots, z_{2r_2} sono r_2 delle rimanenti $h - r_1$ variabili (II), e così di seguito. — L'A. approfondisce lo studio di quei particolari funzionali (I) per i quali è $h = n$ e risulta

$$F[y(t_1 + \omega_1, t_2 + \omega_2, \dots, t_n + \omega_n); z_1, z_2, \dots, z_n] = f(z_1 + \omega_1, z_2 + \omega_2, \dots, z_n + \omega_n),$$

e stabilisce che essi sono caratterizzati dall'indicatrice proiettiva

$$\varphi = \frac{1}{1 + \varrho} \Phi\left(\frac{1 + \varrho}{\alpha_1}, \dots, \frac{1 + \varrho}{\alpha_n}\right),$$

ove $\varrho = \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n$, e Φ è una funzione arbitraria.

Silvio Cinquini.

Pellegrino, Franco: Ancora sulla continuità dei funzionali analitici. *Rend. Mat. e Appl.*, V. Ser. 9, 104—122 (1950).

L'A. riprende la dimostrazione, che ha dato in collaborazione con H. G. Häfeli (questo Zbl. 30, 34), della continuità di ogni funzionale analitico (secondo Fantappiè) lineare, per rilevare come tale dimostrazione possa notevolmente semplificarsi, usufruendo di alcune considerazioni, poste in luce nel presente lavoro, tra le quali citiamo quelle relative alle rette dello spazio delle funzioni analitiche localmente. — Inoltre l'A. rileva come le nuove considerazioni diano luogo ad applicazioni quale, ad esempio, il calcolo del valore di ogni funzionale analitico lineare, applicato alla

somma di una serie uniformemente convergente, come somma della serie dei valori del funzionale applicato ai singoli termini della serie.

Silvio Cinquini.

Carafa, Mario: Sulle regioni connesse dello spazio funzionale analitico e sulla rappresentazione dei funzionali polinomiali. *Rend. Mat. e Appl.*, V. Ser. 9, 478—492 (1950).

Sia H una regione funzionale (non lineare), nella quale è definito un funzionale F analitico localmente (secondo Fantappiè). È noto che, se $y(t)$ è una funzione qualunque di H , esiste tutto un intorno ristretto (A, σ) di $y(t)$ appartenente a H . L'A. chiama contigui due intorni (A, σ) di H quando hanno in comune una funzione (e quindi tutto un intorno) e dimostra che in una regione funzionale H connessa è sempre possibile passare da un prefissato intorno a un qualunque altro intorno con una successione finita di intorni contigui appartenenti a H . — Inoltre, se ogni punto della regione connessa H possiede almeno un intorno connesso appartenente a H , basta conoscere il funzionale F in un intorno connesso di una qualunque funzione $y_0(t)$ per poterlo determinare con successivi prolungamenti in tutta la regione H . — Come applicazione l'A. prova che un funzionale (analitico localmente) polinomiale, definito in una regione H' tale che ogni suo punto abbia almeno un intorno connesso interno a H' , è rappresentabile, in ciascuna delle regioni connesse di cui è formata H' , con un unico sviluppo di Fantappiè.

Silvio Cinquini.

Shimoda, Isae: On power series in abstract spaces. *Math. Japon.* 1, 69—73 (1948).

Il s'agit de développements en séries du type $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$, où $h_n(x)$ est un polynôme homogène de degré n , d'une fonction analytique $f(x)$ définie dans un domaine d'un espace de Banach complexe E et à valeurs dans un espace de Banach complexe E' [pour les définitions des termes employés ci-dessus cf. A. E. Taylor, *Math. Ann.* 115, 466—484 (1938), ce *Zbl.* 18, 365 et M. A. Zorn, *Ann. of Math.*, II. Ser. 46, 585—593 (1945)]. On désignera par λ le plus grand nombre positif tel que $f(x)$ soit analytique et bornée pour $\|x\| < r < \lambda$ et par τ le plus grand nombre positif tel que $f(x)$ soit analytique pour $\|x\| < \tau$ [λ est un rayon d'analyticité au sens de A. D. Michal et R. S. Martin, *J. Math. pur. appl.*, IX. Sér. 13, 69—91 (1934), ce *Zbl.* 9, 23; l'A. réserve ce nom à τ]. L'A. établit les égalités.

$$\frac{1}{\lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sup_{\|x\|=1} \|h_n(x)\|}, \quad \frac{1}{\tau} = \sup_{G \in \mathcal{K}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sup_{x \in G} \|h_n(x)\|}$$

où \mathcal{K} est l'ensemble de tous les compacts G inclus en $\|x\| = 1$,

$$\frac{1}{\tau} = \sup_{\|x\|=1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|h_n(x)\|}.$$

L'A. termine en donnant un exemple pour lequel $\tau > \lambda$.

André Revuz.

Matsuyama, Noboru: Linear topological spaces and its pseudo-norms. *Tôhoku math. J.*, II. Ser. 1, 14—21 (1949).

Remarques élémentaires sur la définition d'une topologie d'espace vectoriel par des semi-normes (au sens de Hyers, c'est-à-dire ne satisfaisant pas nécessairement à l'inégalité du triangle).

Jean Dieudonné.

Kawada, Yukiyo: On equivalence of measures on a infinite product space. *Math. Japon.* 1, 170—177 (1949).

Es sei \bar{X} das Cartesische Produkt $\mathfrak{B}_{n=1}^{\infty} X_n$ der Mengen X_n , \mathfrak{B}_n sei eine Borelklasse von Teilmengen E_n von X_n . Es sei ferner $X^{(n)} = X_1 \times \dots \times X_n$, $\mathfrak{B}^{(n)} = \mathfrak{B}_{i=1}^n \mathfrak{B}_i$. Eine Menge $R_n = E_1 \times \dots \times E_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \dots$ heißt ein Rechteck in \bar{X} . $\mathfrak{S}^{(n)}$ sei für festes n die Borelklasse, die durch die Menge aller dieser Recht-

eeke in \bar{X} erzeugt wird. Alle $A_n = E_1 \times \cdots \times E_n$ erzeugen die zu $\mathfrak{S}^{(n)}$ isomorphe Borelklasse $\mathfrak{B}^{(n)}$ auf $X^{(n)}$. Schließlich sei \mathfrak{S} die durch alle $\sum_{k=1}^n R_k$ in \bar{X} erzeugte

Borelklasse. $\mathfrak{S}(\mathfrak{S})$ bezeichne die Menge aller abzählbar additiven Maßfunktionen $\mu(B)$ auf \mathfrak{S} . Ist $\mu(B) \geq 0$ für alle B und $\mu(X) = 1$, so spricht man von einem Maß auf \mathfrak{S} . $\mathfrak{S}(\mathfrak{S})$ ist ein Banachraum bezüglich der Norm $\|\mu\| = \sup(\mu(A) - \mu(B))$ für alle $A, B \in \mathfrak{S}$ mit $A \cap B = 0$, $A \cup B = X$. Ist m ein Maß auf \mathfrak{S} , so sei $m^{(n)}$ die Einschränkung auf $\mathfrak{S}^{(n)}$, $m^{(n)}$ das auf $X^{(n)}$ durch $m^{(n)}(A_n) = m^{(n)}(R_n)$ erklärte Maß, das die Projektion von m auf $X^{(n)}$ heißt. Mit $\varrho(m, m') = \|m - m'\|$ gilt für zwei Maße m, m' auf \mathfrak{S} stets $\varrho(m, m') = \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(m^{(n)}, m'^{(n)})$. $m' < m(f)$ be-

deute, daß m' m -absolut stetig ist und die Darstellung $m'(E) = \int_E f(x) m(dx)$

für alle $E \in \mathfrak{S}$ hat. Ist $m' < m(f)$ auf \mathfrak{S} , so gilt $m'^{(n)} < m^{(n)}(f_n)$ auf $X^{(n)}$. Wird $f_n(x)$ auf X durch die Festsetzung $f_n(x) = f_n(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) = f_n(x_1, \dots, x_n)$ erklärt, so gilt $\lim f_n(x) = f(x)$ m -fast überall auf \bar{X} , ferner gilt $\lim \|f(x) - f_n(x)\| = 0$ im Sinne der L_1 -Norm bezüglich m . Ist ferner $m' = m'_a + m'_s$ die Lebesguesche Zerlegung von m' bezüglich m mit $m'_a < m(f)$, $m'_s \perp m$ (d. h. singular zu m), ebenso $m'^{(n)} = (m'^{(n)})_a + (m'^{(n)})_s$ mit $(m'^{(n)})_a < m^{(n)}(f_n)$ und $(m'^{(n)})_s \perp m^{(n)}$, so gilt auf \bar{X} m -fast überall $\lim f_n(x) = f(x)$. Daraus ergibt sich speziell ein Äquivalenzkriterium für zwei Maße m und m' auf \mathfrak{S} . Aus diesen Resultaten wird neu hergeleitet ein Kriterium von S. Kakutani (dies. Zbl. 30, 23) für die Äquivalenz bzw. Orthogonalität zweier Maße auf \mathfrak{S} , die als unendliche direkte Produkte von Maßen m_n auf den \mathfrak{B}_n erklärt sind. Gottfried Köthe.

Nakamura, Masahiro: Notes on Banach space. X. Vitali-Hahn-Saks' theorem and k -spaces. Tôhoku math. J., II. Ser. 1, 100—108 (1949).

Ein Banachverband ist ein Vektorverband, der gleichzeitig ein Banachraum ist und dessen Normfunktion dem Axiom $|x| \leq |y| \rightarrow \|x\| \leq \|y\|$ genügt. Solche Banachverbände sind von G. Birkhoff und anderen Autoren bereits weitgehend untersucht worden. An diese Ergebnisse anknüpfend zeigt Verf., daß sich verschiedene bekannte Sätze unter allgemeineren Voraussetzungen herleiten lassen. Teilweise ergeben sich hieraus Vereinfachungen in der Beweisführung. In der Darstellung beschränkt sich Verf. nur auf die wesentlichen Gesichtspunkte und begnügt sich in einzelnen Fällen mit der Skizzierung der Beweise. — Ein lineares Funktional f über einem kompletten Banachverband heißt ordnungstetig, wenn $f(x_\alpha)$ als Moore-Smith-Folge gegen Null strebt für jede gegen Null ordnungskonvergente Folge x_α . Es gilt dann: Hinsichtlich eines ordnungstetigen linearen Funktionals f zerfällt jeder komplette Banachverband in eine direkte Summe von positiven, negativen und Nullidealen. Ein Ideal I heißt positiv, negativ oder Nullideal hinsichtlich f , wenn aus $x \in I$ und $0 < y \leq |x|$ folgt $f(y) > 0$, $f(y) < 0$ oder $f(y) = 0$. Von G. Birkhoff wurde dieser Satz nur für Banachverbände mit streng monotoner Normfunktion bewiesen. Verf. bemerkt jedoch, daß derselbe Beweis sich auch unter dieser allgemeineren Voraussetzung durchführen läßt. Weiter wird gezeigt: In einem kompletten Banachverband ist der Limes einer abzählbaren, schwach konvergenten Folge von ordnungstetigen linearen Funktionalen selbst ordnungstetig. Aus dem Beweis ergibt sich noch der Satz von Vitali-Hahn-Saks: Wenn eine Folge von additiven und absolut stetigen Mengenfunktionen über einem Raum mit endlichem und vollständig additivem Maß auf jeder Menge konvergiert, so ist ihr Limes ebenfalls absolut stetig. — Im zweiten Teil der Arbeit gibt Verf. einige Anwendungen des ersten Satzes. Es handelt sich dabei um Beziehungen zwischen Banachverbänden und den zugeordneten konjugierten bzw. zweifach konjugierten Räumen. Um den ersten Satz stets anwenden zu können, wird über die Banachverbände vorausgesetzt, daß sie komplett sind und daß über ihnen jedes lineare Funktional ordnungstetig ist. Diese letzte Bedingung ist damit gleichwertig, daß für jede gegen Null ordnungskonvergente Folge x_α gilt $|x_\alpha| \rightarrow 0$. — Im dritten Abschnitt der Arbeit gibt Verf. neue Beweise zu teilweise bekannten Sätzen über K -Räume. Ein kompletter Banachverband heißt ein K -Raum, wenn jede Folge $0 \leq x_n \leq x_{n+1}$ mit beschränkter Norm streng gegen ihr Supremum konvergiert. Es ergibt sich: Ein Banachraum ist genau dann ein K -Raum, wenn jede metrisch beschränkte Moore-Smith-Folge streng gegen ihre obere Grenze konvergiert. Ein K -Raum ist ein Ideal im zweifach konjugierten Raum. Ein Banachverband ist genau dann ein K -Raum, wenn er mit der Gesamtheit

aller ordnungstetigen linearen Funktionale des konjugierten Raumes übereinstimmt. Wenn der konjugierte Raum eines Banachverbandes separabel ist, so ist er ein K -Raum. Ein Banachverband ist genau dann ein K -Raum, wenn er schwach komplett ist. *Hans-Joachim Kowalsky.*

Morse, Marston and William Transue: Norms of distribution functions associated with bilinear functionals. Contrib. Fourier Analysis, Ann. Math. Studies Nr. 25, 104—144 (1950).

A und B seien Banachsche pseudonormierte Räume der reellwertigen Funktionen $x(s)$ bzw. $y(t)$ (s variere in E' : $0 \leq s \leq 1$ und t in E'' : $0 \leq t \leq 1$). Für die Pseudonorm $|x|_A$ für ein Element $x \in A$ gilt $|x|_A \geq 0$, $|x_1 + x_2|_A \leq |x_1|_A + |x_2|_A$, $|c x|_A = |c| |x|_A$. Insbesondere werden für A, B der Raum L_p und der Banachsche Raum C zugelassen. — L_p ist der Raum aller meßbaren Funktionen $x(s)$ mit $x(s) = 0$ für $s < 0$ und $s > 1$ mit der Pseudonorm: $\left(\int_0^1 |x(s)|^p ds \right)^{1/p}$. $f(x, y)$ sei ein in $A \times B$ definiertes reellwertiges Funktional. f heißt über $A \times B$ bilinear, falls $f(x, y)$ für ein festes x bzw. y additiv und homogen ist und falls es eine Konstante M derart gibt, daß $|f(x, y)| \leq |x|_A |y|_B M$. Von den Verff. wurde bewiesen (dies. Zbl. 35, 71), daß sich $f(x, y)$ als Lebesgue-Stieltjesches Integral in der Form

$$f(x, y) = \int_0^1 x(s) d_s \int_0^1 y(t) d_t k(s, t) = \int_0^1 y(s) d_s \int_0^1 x(t) d_t k(t, s)$$

schreiben läßt. — Die Funktion $k(s, t)$ erweist sich in einem von den Verff. definierten Sinne als (links) kanonisch. Eine auf der reellen s -Achse definierte Funktion $g(s)$ heißt hinsichtlich des Intervalls $[0, 1]$ (links) kanonisch, falls sie von beschränkter Variation ist, $g(s) = 0$ für $s \leq 0$, $g(s) = g(1)$ für $s \geq 1$ und $g(s)$ für $s < 1$ links stetig ist. Sind E' bzw. E'' das Intervall $0 \leq s \leq 1$ bzw. $0 \leq t \leq 1$, so heißt eine in der (s, t) -Ebene definierte reellwertige Funktion $k(s, t)$ (links) kanonisch hinsichtlich $E' \times E''$, falls $k(s, t)$ bei jedem festen t bzw. jedem festen s hinsichtlich s bzw. t in bezug auf E' bzw. E'' links-kanonisch ist. — Der Funktion $k(s, t)$ wird hinsichtlich der Funktionsräume A, B eine Variation $h(A, B, k)$ zugeordnet, die folgendermaßen definiert wird: Mit dem Quadrat $E' \times E''$ wird eine Unterteilung \mathfrak{A} vorgenommen, die durch die Teilpunkte $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{m_{\mathfrak{A}}} = 1$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n_{\mathfrak{A}}} = 1$ gegeben ist. $\eta(s)$ bzw. $\vartheta(t)$ seien Stufenfunktionen, die in den Intervallen $[s_0, s_1], [s_1, s_2], \dots, [s_{m_{\mathfrak{A}}-1}, s_{m_{\mathfrak{A}}}]$ bzw. $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n_{\mathfrak{A}}-1}, t_{n_{\mathfrak{A}}}]$ konstant sind. Ferner wird $\Delta_{k\lambda}(k) = k(s_k, t_\lambda) - k(s_k, t_{\lambda-1}) - k(s_{k-1}, t_\lambda) + k(s_{k-1}, t_{\lambda-1})$ gesetzt. Dann ist $h(A, B, k)$ durch $h(A, B, k) = \sup_{\eta, \vartheta} \sum_{k, \lambda} \eta(s_k) \vartheta(t_\lambda) \Delta_{k\lambda}(k)$ definiert, wobei das Supremum für alle Aufteilungen \mathfrak{A} von $E' \times E''$ zu bilden ist, für die $|\eta|_A = 1$ und $|\vartheta|_B = 1$ ist. Dabei ist $|\eta|_A$, falls $\eta \in A = L_p$, die Pseudonorm dieser Funktion. Ist aber $A = C$, so wird gesetzt $|\eta|_A = \text{Max } |\eta(s)|$. Verff. zeigen folgenden Satz: Hinsichtlich der Räume $A \times B$ gleich $C \times C$, $C \times L_p$, $L_p \times C$, $L_p \times L_q$ ($p > 1, q > 1$) gibt es eine Funktion k mit $0 < h(A, B, k) < \infty$, während für die Vitali-Variation (vgl. Verff., dies. Zbl. 41, 34) gilt $V(k) = \infty$. Weiter zeigt sich, daß es eine in $E' \times E''$ stetige Funktion $k(u, v)$ der Form

$k(u, v) = \int_0^u \int_0^v \varphi(s, t) ds dt$ ($u > 0, v > 0$) gibt, derart, daß die Vitalische Variation in dem Rechteck mit den Ecken $(0, 0)$ und (x, y) für jedes $x > 0, y > 0$ gleich Unendlich ist, während für die Frechetsche Variation $P(k) = O(|x y|^\mu)$ ($\mu > 0$) gilt. *Kurt Schröder.*

Ważewski, Tadeusz: Sur l'évaluation du domaine d'existence des fonctions implicites dans les cas des espaces abstraits. Fundamenta Math. 37, 5—24 (1950).

Es werden Abschätzungen für den Existenzbereich implizit gegebener Funktionen in metrischen Räumen hergeleitet, wenn die Existenz dieser Funktionen im Kleinen feststeht. Sind X, Y metrische Räume, bezeichnet d die Distanz in ihnen und ist $g(x)$ eine in $X_1 \subseteq X$ definierte Funktion, so nennt Verf. allongement supérieur bzw. inférieur der Funktion g im Punkt x_0 die Ausdrücke

$$\overline{\text{all}} g(x_0) = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \frac{d(g(x_0), g(x))}{d(x_0, x)}, \quad \text{all } g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{d(g(x_0), g(x))}{d(x_0, x)}.$$

Von den vier Sätzen des Verf. zu dem genannten Problem lautet der Satz 2: Es seien X ein Banach-Raum, Y und Z metrische Räume, Y überdies vollständig; a, b, c Punkte von X, Y, Z und K die Doppelkugel $\|x - a\| < \tau, d(b, y) < R; f(x, y)$ stetig in K und die Werte Punkte von $Z, c = f(a, b)$; für $(x, y) \in K$ und $f(x, y) = c$ sei $\text{all}_x f(x, y) \leq \alpha < \infty, \text{all}_y f(x, y) \geq \beta > 0$; für jeden Punkt x^*, y^* von K mit $f(x^*, y^*) = c$ möge es eine stetige Funktion $\varphi(x)$ geben, die in einer gewissen Umgebung $U(x^*) \subseteq X$ des Punktes x^* die Gleichung $f(x, \varphi(x))$ erfüllt, und in einer gewissen Umgebung $V(x^*, y^*)$ sei diese Funktion die einzige Lösung von $f(x, y) = c$.

Ist k die Kugel $\|x - a\| < \min(r, R \cdot \beta/\alpha)$, so gibt es in k genau eine Funktion $\sigma(x)$, die in k stetig ist und die Gleichungen $f(x, \sigma(x)) = c$, $\sigma(a) = b$ erfüllt. Für diese Funktion ist außerdem $\alpha\|\sigma(x) - \sigma(y)\| \leq \beta\|x - y\|$.

Erich Kamke.

Praktische Analysis:

- **Boaga, Giovanni:** *Calcolo numerico*. Milano: Fasani 1949. 472 p. 3000 L.

Die im ersten Satz des Vorworts ausgesprochene Absicht, „allen denen — Geometern, Industriemathematikern, Ingenieuren, Chemikern, Physikern, Statistikern usw. — nützlich zu sein, die bei ihren Projekten, Studien und Forschungen die Regeln der Arithmetik, der Algebra und der Analysis praktisch anwenden müssen“, sowie der an das bekannte Buch von Runge-König erinnernde Titel könnten die irrije Meinung erwecken, daß hier ein Buch in der Art der Werke von z. B. Willers oder Scarborough über Praktische Mathematik vorliegt. Es handelt sich aber eher um eine kursorische Einführung in die obengenannten Gebiete mit zahlreichen numerischen Beispielen unter Weglassung der Beweise. Z. B. bringt das Kapitel über Differentialgleichungen u. a. einen Überblick über Lösungsmethoden für die in geschlossener Form lösbaren Typen, nicht dagegen die Verfahren von Runge-Kutta und Adams-Störmer und gar nichts über Eigen- und Randwertprobleme. Fast bei allen besprochenen Verfahren werden nur die zugrunde liegenden Formeln, nicht dagegen die zugehörigen Rechenschemata angegeben, besonders auffällig etwa beim Verfahren von Graeffe oder bei der Harmonischen Analyse, bei deren Behandlung man einen Hinweis auf die Zweckmäßigkeit einer durch 12 teilbaren Punktzahl und die Möglichkeiten der Faltung, kurz auf die Rungeschen Schemata vermißt. — Inhalt: 1. Teil (Schnellrechnen. Sätze der Analysis, Reihenentwicklungen): I. Multiplikation. II. Division. III. Die Symbole Σ und Π und ihre Anwendung. IV. Die Binomialentwicklung und ihre Anwendung. V. Grenzwerte, Ableitungen, Reihen. VI. Die Taylor-Reihe und ihre Anwendung. VII. Logarithmen. VIII. Approximatives Rechnen und periodische Dezimalbrüche. IX. Kettenbrüche und Reihen von Teilbrüchen. X. Determinanten. 2. Teil (Graphische Lösung von Gleichungen): I. Analytische Geometrie. II. Graphische Lösung algebraischer Gleichungen. III. Graphische Lösung transzendenter Gleichungen. IV. Graphische Lösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. 3. Teil (Numerische Lösung von Gleichungen): I. Algebra. II. Transformation der Gleichungen und ihre Anwendung auf die numerische Lösung von Gleichungen. Graeffesche Methode. III. Algebraische Lösungsformeln für Gleichungen dritten und vierten Grades. IV. Trigonometrische Lösung von Gleichungen zweiten und dritten Grades. V. Lösung reziproker Gleichungen. VI. Biquadratische Gleichungen. VII. Lineare Gleichungssysteme. Hauptsätze und numerische Anwendungen. VIII. Resultante und Elimination. Anwendung auf die Lösung nichtlinearer Systeme. IX. Numerische Behandlung algebraischer Gleichungen mit rationalen Koeffizienten. X. Lösung von Gleichungen durch Kettenbrüche. XI. Lösung von Gleichungen durch Entwicklung in Teilerbruchreihen. 4. Teil (Interpolation. Numerische Integration bestimmter Integrale. Integration von Differentialgleichungen): I. Interpolation. II. Angenäherte Berechnung bestimmter Integrale. III. Integration von Differentialgleichungen. 5. Teil (Ausgleichsrechnung): I. Analytische Darstellung von Versuchsergebnissen. II. Ausgleichung nichtperiodischer Größen. III. Ausgleichung periodischer Größen. IV. Graphische Darstellung einiger bekannter Funktionen.

Johannes Weissinger.

- **Hruša, K.:** *Rechnen mit unvollständigen Zahlen*. Praha: Jedn. čs. matem. a fys. 1949. 106 S. 36 Kčs. [Tschechisch].

Vogel, Alfred: *Zur Bestimmung der Eigenwerte einer Matrix durch Iteration*. Z. angew. Math. Mech. 30, 174—182 (1950).

Es wird die spezielle Matrizenigenwertaufgabe $(\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}) \mathfrak{x} = 0$ behandelt. Bei einer reellen Matrix n -ter Ordnung mit den einfachen Eigenwerten λ_i und $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ wird das bekannte Iterationsverfahren $\mathfrak{A}_{30}, \mathfrak{A}_{30}^2, \dots, \mathfrak{A}_{30}^m$ mit passend gewähltem \mathfrak{z}_0 zur Berechnung der Maximalwurzel λ_1 und des dazugehörigen Eigenvektors \mathfrak{x}_1 beschrieben. Neben dem Sonderfall der symmetrischen Matrix finden Konvergenzbeschleunigungen besondere Beachtung. — Die Berechnung der Minimalwurzel (bei Schwingungsproblemen interessieren oft gerade diese) geschieht nach Vornahme einer Spektralverschiebung mittels des als bekannt vorausgesetzten Eigenwertes λ_1 auf gleiche Weise. — Schließlich wird die Berechnung weiterer Eigenwerte durch Herstellung reduzierter Matrizen besprochen (Kochsche Methode). — Als Anwendungsbeispiel wird die Bestimmung der Drehschwingungszahlen einer mit fünf Massen arbeitenden Kolbenmaschine gebracht.

Heinz Unger.

Shimizu, Tatsujiro and Yôichi Katayama: Solutions of non-linear equations by punched-card methods. *Math. Japon.* 1, 92—97 (1948).

Die Schwierigkeit der Lösung eines Systemes algebraischer Gleichungen höheren Grades für mehr als zwei Unbekannte besteht in der Auffindung von ersten Näherungswerten für die Unbekannten. Die Verff. erläutern an einem System von drei Gleichungen dritten Grades $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ von drei Unbekannten x, y, z einen Weg zur Auffindung solcher ersten Näherungen mittels des Lochkarten-Verfahrens. Er besteht darin, zunächst obere und untere Grenzen für die Unbekannten zu suchen. Das dadurch für jede Unbekannte gegebene Intervall wird in zehn Teile geteilt, und dann werden für alle möglichen Kombinationen der 3×10 Werte die Werte der f_1, f_2, f_3 unter Benutzung von Lochkarten ausgerechnet. Die praktische Art der Durchführung dieser Rechnung wird in der Arbeit erläutert. Die Wurzeln liegen im allgemeinen in den Intervallen, in denen alle f_i ihr Vorzeichen ändern, wenn man je zwei Unbekannte festhält und die dritte das Intervall durchlaufen läßt. Im einzelnen wird das untersucht. Durch nochmalige Unterteilung dieses Intervalles erhält man nach demselben Verfahren bessere Näherungswerte. — Angewendet wird das Verfahren zur Lösung einer Randwertaufgabe einer nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Diese wird in eine Integralgleichung umgeformt, die dann unter Benutzung der Gaußschen Mittelwertformel für $n = 5$ durch einen Satz algebraischer Gleichungen angenähert wird, die nach obigem Verfahren gelöst werden.

Friedrich Adolf Willers.

Gawurin, M. K.: Über eine Methode der numerischen Integration von homogenen linearen Differentialgleichungen, die für die Mechanisierung der Rechnung bequem ist. *Trudy mat. Inst. Steklov* 28, 152—156 (1949) [Russisch].

Folgende Methode der Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung $y'' + p(x)y' + q(x) = 0$, $a \leq x \leq b$, wird zur bequemen Ausführung mittels Rechenmaschinen vorgeschlagen. Es sei $(b-a)/n = h$, $x_i = a + ih$. Vermittelt der beiden Grundlösungen $u_i(x)$ und $v_i(x)$, für die $u_i(x_i) = 1$, $u'_i(x_i) = 0$ bzw. $v_i(x_i) = 0$, $v'_i(x_i) = 1$ gilt, stellt sich die allgemeine Lösung so dar: $y(x) = y(x_i)u_i(x) + y'(x_i)v_i(x)$. Daraus folgen die Rekursionsformeln: $y(x_{i+1}) = y(x_i)u_i(x_{i+1}) + y'(x_i)v_i(x_{i+1})$, $y'(x_{i+1}) = y(x_i)u'_i(x_{i+1}) + y'(x_i)v'_i(x_{i+1})$. Um hieraus die aufeinander folgenden Werte von $y(x_i)$ und $y'(x_i)$ für alle Teilungspunkte bis zu $x = b$ zu berechnen, braucht man die Kenntnis von $u_i(x_{i+1})$, $u'_i(x_{i+1})$, $v_i(x_{i+1})$, $v'_i(x_{i+1})$ für alle i . Ihre Berechnung bildet das Hauptstück der gesamten Auswertung. Sie kann mittels der Taylorentwicklungen $u_i(x_{i+1}) = u_i(x_i) + u'_i(x_i)h + \dots$, $u'_i(x_{i+1}) = u'_i(x_i) + u''_i(x_i)h + \dots$, (analog für $v(x)$), deren spätere Koeffizienten der Differentialgleichung entnommen werden [$u''_i(x_i) = -q(x_i)$, $u''_i(x) = p(x_i)q(x_i) - q'(x_i)$ usw.], ausgeführt werden und verlangt die Durchführung einer sich stets wiederholenden gleichartigen Rechnung. Daher ist diese Methode zugeschnitten auf die Verwendung einer Rechenmaschine als Hilfsmittel für die praktische Durchführung. Es wird noch eine Fehlerabschätzung durchgeführt und das Verfahren an einem numerischen Beispiel, ausgeführt für die Besselsche Differentialgleichung, illustriert.

Erik Svenson.

Kantorovič, L. V.: Über Differentialgleichungen von der Form $x'' = f(x)$. *Trudy mat. Inst. Steklov* 28, 148—151 (1949) [Russisch].

Da die Lösung $t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}$ mit $F(x) = 2 \int_0^x f(x) dx$ der Differentialgleichung $d^2x/dt^2 = f(x)$ eine zur numerischen Auswertung unbequeme Form hat, weil das äußere Integral ein uneigentliches ist, sind Methoden angegeben worden, die Schwierigkeiten zu umgehen, z. B. von Bravin [*Isd. Art. Akad. RKKA*, Bd. 25 (1938)]. Verf. gibt eine neue Methode an, die auf einer Abtrennung der Singularität

des Integranden beruht, vermittelt des bei $x \rightarrow 0$ verschwindenden Ausdruckes $\sqrt{F(x)}^{-1} - (\sqrt{F'(0)x})^{-1}$ und nachheriger Anwendung einer der bekannten Näherungsformeln für bestimmte Integrale auf diesen Ausdruck. Desgleichen ist zur Aus-

wertung des gegebenen Integrales die Steklovsche Näherungsformel $\int_0^h \frac{1}{\sqrt{x}} \psi(x) dx$

$\approx (\sqrt{h/15})[12\psi(0) + 16\psi(h/2) + 2\psi(h)]$ (hier mit der differenzierbaren Funktion $\psi(x) = \sqrt{x/F(x)}$) geeignet, wo die Koeffizienten so bestimmt worden sind, daß die Gleichung für $\psi = 1, x, x^2$ genau stimmt. Man kann in ihr auch noch mehr Glieder zur Erhöhung der Genauigkeit einführen. — An dem Beispiel $d^2x/dt^2 = 1 + x$, $x|_{t=0} = 0$, $dx/dt|_{t=0} = 0$, mit der genauen Lösung $x = \cosh t - 1$ wird die Brauchbarkeit aller genannten Methoden durch numerische Auswertung illustriert.

Erik Svenson.

Kac, A. M.: Zur Frage der angenäherten Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Priklad. Mat. Mech. **14**, 111—113 (1950) [Russisch].

Die Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung $\ddot{x} + h(x, \dot{x})\dot{x} + k^2(x, \dot{x})x = 0$ nach der Näherungsmethode durch Mittelung von van der Pol wird in der Arbeit abgeändert. An Stelle des Ansatzes $x = \alpha \sin(\omega t + \varepsilon)$ [$\omega = \text{const}$, α, ε langsam mit der Zeit veränderliche Größen, die durch die Beziehung $\dot{\alpha} \sin(\omega t + \varepsilon) + \alpha \dot{\varepsilon} \cos(\omega t + \varepsilon) = 0$ verknüpft sind] wird der allgemeinere Ansatz gemacht:

$x = \alpha \sin\left(\int_0^t \omega dt + \varepsilon\right)$ mit $\dot{\alpha} \sin\left(\int_0^t \omega dt + \varepsilon\right) + \alpha \dot{\varepsilon} \cos\left(\int_0^t \omega dt + \varepsilon\right) = 0$. Der

neue Ansatz ist dann geeignet, wenn der durch die Gleichung beschriebene periodische Vorgang so verläuft, daß die Frequenz bei langsamer Änderung in längeren Zeiten erheblich vom Anfangswert abweicht. Die Art der Durchführung der Methode bleibt erhalten und führt auf elementarem Wege vermittelt Quadraturen zu einer Näherungslösung. Sie wird am Schluß am Beispiel $\ddot{x} + \frac{3\sqrt{|x|}}{2T}\dot{x} + \frac{\sqrt{|x|}}{T}x = 0$ erläutert.

Erik Svenson.

Woods, L. C.: Improvement to the accuracy of arithmetical solutions to certain two-dimensional field problems. Quart. J. Mech. appl. Math. **3**, 349—363 (1950).

Die Arbeit beschäftigt sich mit Methoden zur Verbesserung der Genauigkeit numerischer Lösungen ebener Randwertprobleme bei Anwendung des Differenzenverfahrens (quadratisches Gitter). Ausgehend von Arbeiten von Birkley (dies. Zbl. **33**, 286) und L. Fox (dies. Zbl. **34**, 221) wird ein Ausdruck Δ_0 für die Verbesserung des mit dem gewöhnlichen Differenzenverfahren erhaltenen Näherungswertes f_0 der Lösung des Randwertproblems an der Stelle (x_0, y_0) angegeben. Während nach L. Fox vierte Differenzen von f zur Berechnung des Korrekturgliedes ermittelt werden müssen, geht Verf. von der Form $\Delta_0 \doteq \alpha^4 (\nabla^4 f - 2 \partial^2 f / \partial x \partial y) / 6$, α Maschenweite, aus, wobei $\nabla^4 f$ jeweils unter Benutzung der gegebenen Dgl. ermittelt werden kann. So gehen in Δ_0 nur die Funktionswerte f_i in den Eckpunkten der 4 an (x_0, y_0) anstoßenden Quadrate ein und daher läßt sich Extrapolation in den den Randpunkten benachbarten Punkten vermeiden. Das Verfahren ist geeignet für Gln. der Form a) $\nabla^2 f = \Delta f = \text{const}$, b) $\Delta f = \Phi(x, y)$, c) $\nabla^4 f = \Delta \Delta f = \Phi(x, y)$, d) einfache Fälle von $\Delta f = \Phi(f, f_x, f_y, x, y)$, z. B. $\Delta f + \lambda f = 0$, λ Eigenwert. Der Wert $f_0 + \Delta_0$ unterscheidet sich von der strengen Lösung des Randwertproblems an der Stelle (x_0, y_0) um $O(a^6)$, im Falle a) sogar um $O(a^8)$. An Hand von Zahlenbeispielen werden insbesondere Vergleiche mit der von Fox angegebenen Verbesserung angestellt.

Fritz Reutter.

Hidaka, Koji: Stencils for integrating partial differential equations of mathematical physics. Math. Japon. **2**, 27—34 (1949).

In einem ebenen quadratischen Gitter werden für die Anwendung des Differenzenverfahrens einige finite Ausdrücke höherer Annäherung für $\partial^2 f / \partial x \partial y$, $\Delta^2 f$ und $\Delta^3 f$ in Gestalt von „Sternen“ angegeben.

Lothar Collatz.

Krylov, V. I.: Anwendung der Euler-Laplaceschen Formel zur angenäherten Lösung von Integralgleichungen von Volterraschem Typus. Trudy mat. Inst. Steklov 28, 33—72 (1949) [Russisch].

Es wird eine Methode geschildert, die Lösung $\varphi(x)$ der Integralgleichung $\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds$ für die äquidistanten Tabellenwerte $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, ..., $x_k = a + kh$, ... bequem numerisch zu berechnen. Von $f(x)$ und dem Kern $K(x, s)$ wird verlangt, daß sie $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar sind, so daß dasselbe auch von der Lösung gilt. Sei $\varphi_k = \varphi(a + kh)$, desgleichen für f und K . Die Werte φ_k lassen sich nacheinander angenähert berechnen dadurch, daß man in der Integralgleichung $x = x_k$ setzt und das Integral durch eine der Formeln der mechanischen Quadratur annähert: $\varphi_k = f_k + \sum_{i=0}^k A_{ki} K_{ki} \varphi_i$. Die Besonderheit der Me-

thode ergibt sich aus der Art der benutzten Näherungsformel für die Integrale. Benutzt wird die Eulersche Summenformel, in der die Ableitungen des Integranden durch seine Differenzen aufsteigender Ordnung angenähert ausgedrückt sind, d. h. die Laplacesche Näherungsformel. Unter den gemachten Voraussetzungen über f und K können Differenzen bis zur n -ten Ordnung herangezogen werden. Das Fehlerglied ist dann von einer Ordnung $\geq n+1$ bezüglich h . Die Verwendung dieser Näherungsausdrücke bringt es mit sich, daß nach allen Umformungen, insbesondere der Ersetzung der Differenzen n -ter Ordnung durch $n+1$ aufeinanderfolgende Funktionswerte in der Summe auf der rechten Seite lineare Aggregate der φ_i mit bekannten Koeffizienten stehen, die, angefangen von φ_0 (das $= f_0$ ist), anfangs über das φ_k auf der linken Seite hinaus- und bis φ_n reichen. Erst angefangen von φ_n reichen sie stets bis zu dem jeweiligen φ_k . Daher zerfällt die Rechnung in zwei Abschnitte: erstens die gemeinschaftliche Berechnung von φ_1 bis φ_n aus einem linearen algebraischen Gleichungssystem von n Gleichungen und zweitens aufeinanderfolgende Einzelberechnungen weiterer φ_k . Die Methode benötigt ihrem Wesen nach also nicht nur die Kenntnis des Kernes im Dreiecksbereich $a \leq s \leq x \leq b$, sondern es treten bei der Auswertung des algebraischen Gleichungssystems vereinzelte Werte mit $s > x$ auf, die extrapoliert werden müssen bei Einhaltung der Differenzierbarkeitsforderungen. Es werden bequeme Schemata des Rechnungsganges angegeben und das Verfahren im Fall der Heranziehung der Differenzen bis zur 2. bzw. 4. Ordnung an numerischen Beispielen erläutert. Die Resultate werden mit genauen Werten verglichen, die dank der Auswahl der Beispiele bekannt sind, und sie zeigen eine zufriedenstellende Übereinstimmung. — Die Methode wird noch modifiziert, indem analoge Rechenschemata aufgestellt werden, bei denen im zweiten Abschnitt der Rechnung nicht die Werte φ_k direkt (aufeinanderfolgend) gefunden werden, sondern die Differenzen $\Delta \varphi_k$. Endlich wird gezeigt, daß dieselbe Methode auch brauchbar ist zur Näherungslösung von linearen Integralgleichungen erster Art, sowie von nichtlinearen Integralgleichungen einfacheren Baues, insbesondere solcher vom Typus $\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, s, \varphi(s)) ds$,

wenn das auftretende entsprechende Gleichungssystem, das nicht mehr linear ist, lösbar oder angenähert lösbar ist. Auch hierzu werden Beispiele mit ausführlicher numerischer Durchrechnung gegeben. Fehlerabschätzungen werden, abgesehen von allgemeinen Angaben über die Ordnung der vernachlässigten Glieder, nicht gebracht.

Erik Svensson.

Greenhalgh, D. M. S.: Some new punched-card methods of Fourier synthesis. Proc. Leeds philos. lit. Soc., sci. Sect. 5, 301—307 (1950).

Ter-Stepanjan, G. I.: Über eine allgemeine Eigenschaft von Nomogrammen mit parallelen Skalen für Funktionen von mehreren Veränderlichen. Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady 12, 3—8 (1950) [Russisch].

Boulanger, Georges: Sur quelques propriétés de structure des abaques à plans superposés. Bull. Soc. math. Belgique 1948—1949, 41—48 (1949).

Vom Verf. früher (dies. Zbl. 39, 129) abgeleitete Resultate der allgemeinen Theorie aus überlagerten Ebenen bestehender Nomogramme werden mit Ausblicken auf weitere Untersuchungen wiedergegeben.

Evert Johannes Nyström.

Vil'ner, I. A.: Analytische Theorie der nomographischen Behandlung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen der ersten Klasse. Mat. Sbornik, n. Ser. 27 (69), 3—46 (1950) [Russisch].

Verf. entwickelt eine Untersuchungsreihe, von der schon früher zahlreiche

Kurzmitteilungen bekannt gemacht sind, mit dem Ziel festzustellen: Inwiefern sind analytische Funktionen, bzw. funktionale Beziehungen der Behandlung im Rahmen „der ersten nomographischen Klasse“ zugänglich? Er stellt dies insbesondere für elliptische Integrale 1. Art, bzw. ihre Umkehrfunktionen fest und führt aus, inwiefern die nomographische Methode gerade auf diesem Gebiet besondere Vorteile habe (Gleichberechtigung beider Veränderlicher, anschauliche Übersicht, leichtes Untertafeln u. v. a. m.). Ferner wird eine Reihe von Differentialgleichungen für die nomographische Behandlung von allgemeinen Gesichtspunkten seiner Theorie her erschlossen. Verf. glaubt, darin erheblich über die „bisher nur von praktischen Gesichtspunkten her unternommenen Versuche im Einzelnen“ vorzustoßen. — Leider sind nicht alle Ausführungen des Verf. durchsichtig, da er sich in seiner Ausdrucksweise auf frühere Arbeiten bezieht, die uns unerreichbar bleiben, wie seine Moskauer Dissertation u. a. m.

Egon Ullrich.

Bereis, R.: Mechanismen zur Verwirklichung der Joukowsky-Abbildung. Österreich. Ingenieur-Arch. 4, 252—256 (1950).

Verbindet man zwei Gegenecken eines Gelenkrhombus der Seitenlänge m durch zwei gleichlange Stäbe der Länge l gelenkig mit einem Punkt z , so liegen die beiden andern Ecken z^* , z_1 spiegelbildlich zu einem Kreis vom Radius $a = \sqrt{l^2 - m^2}$ mit z als Inversionsmittelpunkt. Durch geeignete Koppelung zweier solcher Peaucellierscher Inversoren und Führung der Ecke z_1 auf der x -, der entsprechenden Ecke des anderen Inversors auf der y -Achse (z. B. mittels einer Gleithülse oder eines Rollwagens) kann man erreichen, daß die Punkte z , z^* (als komplexe Zahlen aufgefaßt) in der Beziehung $z^* = z + a^2/z$ stehen, also eine Joukowsky-Abbildung verwirklichen. Mit diesem „Zwillingsinversor“ kann man nicht nur Joukowsky-Profile nebst den zugehörigen Stromlinien konstruieren, sondern auch verschiedene andere konforme Abbildungen erzeugen. Durch Abänderung eines von Hart vorgeschlagenen Inversors läßt sich überdies eine veränderliche Einstellbarkeit der Größe a^2 erreichen.

Johannes Weissinger.

Petschacher, Martha: Tabelle di funzioni ipergeometriche. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 9, 389—420 (1950).

In dieser Arbeit, die im Math. Seminar der Universität Innsbruck unter Leitung von L. Vietoris ausgeführt ist, vertafelt Verf. auf 6 Dezimalen die hypergeometrische Funktion (h. F.) $F(\alpha, \beta; \gamma; x) = F(x) = \eta$ von Gauß für $0 \leq x \leq 1$ mit der Spanne $h = 0,02$. Zweiter Eingang ist eine Größe μ , durch die sich die Parameter der h. F. in der Gestalt

$$\alpha = \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} (k-1)^{-1} + [(k+1)(k-1)^{-1} \frac{1}{4} \mu^2 + \frac{1}{4} (k-1)^{-2}]^{1/2},$$

$$\beta = \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} (k-1)^{-1} - [(k+1)(k-1)^{-1} \frac{1}{4} \mu^2 + \frac{1}{4} (k-1)^{-2}]^{1/2},$$

$\gamma = 1 + \mu$ ausdrücken; ihr werden die Werte 0,125, 0,25, ..., 0,875; 1,25, 1,5, ..., 2; 2,5, 3, ..., 7; 8, 9, 10 erteilt, bei festem $k = 1,4$. Die Tafel verzeichnet zugleich die (in der Gasdynamik vorkommende) Funktion von Čaplygin $Y(x) = x^{\mu/2} F(x)/\Gamma(1 + \mu)$. Da die Reihen zur zahlenmäßigen Berechnung von $F(x)$ und $Y(x)$ nicht rasch genug konvergieren, benutzt Verf. dazu

die angenäherte Quadratur, und zwar erstens bei $\int_{x_n}^{x_{n+1}} \eta'' dx$ die integrierte Besselsche Einschalt-

formel, zweitens bei $\int_{x_n}^{x_{n+1}} \eta' dx$ einen Ausdruck, dessen erstes Glied der Trapezformel entspricht,

während das zweite zwei Drittel der Fläche des Dreiecks darstellt, das von den Tangenten an die Kurve η' in den Punkten η'_{n+1} und η'_n mit den Abszissen x_{n+1} und x_n gebildet wird [in der zweiten Zeile von (4) lies wohl η^V statt η^5]. Man bewältigt so die Aufgabe etwa bis hinauf zu $x = 0,7$; um für größere x dieselbe Genauigkeit zu erzielen, bedient sich Verf. einer der Gaußschen Beziehungen zwischen verwandten h. F., die $F(x)$ durch zwei h. F. der Veränderlichen $1 - x$ ausdrückt. Die so für $x = 0,7$ mögliche Probe befriedigt. — Verf. fügt auch zwei Schaubilder der Kurven $\eta = F(x)$ und $y = Y(x)$ mit $\mu = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1, 1,5, 2, 3, 4, 5, 6$ bei.

Lothar Koschmieder.

Linsman, M.: Les machines mathématiques. Bull. Soc. math. Belgique 1948—1949, 17—25 (1949).

Beschreibung der modernen Rechenmaschinen und ihrer Arbeitsweise, vor allem der programmgesteuerten Maschinen, in aufzählender, mehr andeutender als ausführlicher Weise.

Hans Bückner.

Geometrie.

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

● **Zwicker, C.:** *Advanced plane geometry.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1950. X, 299 p. f. 20,00.

Behandlung der Theorie der ebenen Kurven, die auf die übliche geometrische Abbildung der komplexen Zahlen $x + iy = z$ in einer Gaußschen Ebene gestützt ist. Jede Kurve wird so durch eine Gleichung $z = z(u)$ analytisch dargestellt: die reelle Veränderliche u gibt eine Skala von numerischen Werten auf der Kurve. Die Formeln für Tangente, Normale, Krümmungskreis usw. nehmen eine Form an, die mit einer vektoriellen Bezeichnung im wesentlichen gleichbedeutend ist; eine wichtige Rolle spielt natürlich die Operation e^{iq} , die eine Drehung des Winkels q um den Koordinatenursprung bedeutet. Verf. ist ein Techniker, welcher die praktischen Anwendungen dieser Theorie, insbesondere in den Lehren der Mechanik, der Elektrizität und des Magnetismus, im Auge hat; Anwendungen dieser Art erklären im ganzen Buch die rein theoretischen Ausführungen. — Nach einigen allgemeinen Bemerkungen (Kap. 1), gibt Verf. die geometrische Deutung der wichtigsten analytischen Operationen im komplexen Zahlengebiet (Kap. 2); dann wendet er sich zur eingehenden Betrachtung der geraden Linie (Kap. 3), des Dreiecks (Kap. 4), des Kreises (Kap. 5), der ebenen algebraischen Kurven im allgemeinen (Kap. 6). Die Kap. 7, 8, 9 beschäftigen sich mit Ellipse, Hyperbel und Parabel. Es folgen einige Kapitel allgemeiner Richtung, über Evoluten und Evoluten (Kap. 10), über Fußpunktkurven und andere abgeleitete Kurven (Kap. 11), über Flächeninhalte, Schwerpunkte und ähnliches (Kap. 12), über Enveloppen (Kap. 13), orthogonale Trajektorien (Kap. 14), Kurven mit Unstetigkeiten in den Tangenten (Kap. 15). Schließlich, in den Kapiteln 16 bis 21, die Behandlung zahlreicher algebraischer und transzendenter ebener Kurven (Spiralen, Lemniskaten, Cycloiden, Epi- und Hypocycloiden, Kardioiden, Kurven, die in der Konstruktion der Zahnwerke auftreten), immer mit besonderer Berücksichtigung derjenigen Eigenschaften und Kurven, die in der Technik und in der Physik eine Anwendung finden. Insgesamt kann das Buch sowohl für Mathematiker als auch für Techniker von bedeutendem Nutzen sein. — Es seien einige kleine Bemerkungen gestattet. Im 1. Kap. (S. 9–11) ist es nicht ganz klar, ob das Wort „unicursal“ mit „rational“ oder mit „einteilig“ gleichbedeutend ist; später zeigt sich, daß die erste Bedeutung die richtige ist. S. 19 ist $z_1 z_2^* = B - jA$ und $A = |z_1| |z_2| \sin(\zeta_2 - \zeta_1)$. S. 41: Die dort betrachtete Kurve ist nur dann eine Hyperbel, wenn $a > 1$ ist. In den „historical notes“ wäre vielleicht auch das Buch von G. Peano, *Formulario mathematico*, Tomo V, Torino 1908, S. 389–459, zu nennen, welches eine Behandlung der ebenen Kurven enthält, die mit derjenigen des Verf. viele Berührungspunkte aufweist.

Eugenio Giuseppe Togliatti.

● **Klein, F.:** *Vorlesungen über höhere Geometrie.* — 3rd edition, rep. New York: Chelsea Co. 1949. VI, 405 p. \$ 4,95.

Cherubino, Salvatore: *Gruppi abeliani di omografie piane.* Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 9, 177–188 (1950).

Exposé d'une méthode simple de détermination des groupes abéliens d'homographies non dégénérées de S_n , basée sur l'emploi des matrices. Application aux cas de la droite et du plan.

Lucien Godeaux.

Vaccaro, Michelangelo: *Dimensione, ordine e invarianti delle traiettorie di un particolare gruppo di omografie.* Rend. Mat. Appl., V. Ser. 9, 453–477 (1950).

Im n -dimensionalen Raum S_n wird die kontinuierliche Gruppe G_2 aller Homographien betrachtet, die eine gegebene rationale normale C^n und einen Punkt O der C^n invariant lassen. Die Fälle $n = 3, 4$ sind schon von E. Castelnuovo und R. Musso betrachtet worden. Die gegebene Kurve C wird mit den üblichen Gleichungen $x_i = \varrho_0^{-i} \varrho_1^i$ ($i = 0, \dots, n$) dargestellt; als Parameter u_0, u_1 der Gruppe G_2 werden die Koeffizienten der Projektivitätsgruppe $\sigma_0 = \varrho_0, \sigma_1 = u_1 \varrho_0 + u_0 \varrho_1$ gewählt, die auf C^n von G_2 induziert wird. — Im § 1 werden die Gleichungen der Homographien der Gruppe G_2 gegeben und dann alle Fälle untersucht, wo die Trajektorie eines Punktes eine Dimension < 2 hat: Abgesehen vom Punkte O , welcher fest bleibt, findet man, daß die gesuchten Punkte gewisse n rationale normale

Kurven C^{n-s} erfüllen, die in den Schmiegungs- S_{n-s} von C^n in O liegen ($s = 0, 1, \dots, n-1$). — Im § 2 wird in jedem Falle die Ordnung der Trajektorienfläche eines Punktes P bestimmt: diese Ordnung hat im allgemeinen den Wert $n(n-1)$. Im § 3 werden $n-1$ homogene Polynome $A_x^s (s = 2 \dots, n)$ in den Veränderlichen x_0, x_1, \dots, x_s gefunden, welche von den Homographien der Gruppe G_2 folgendermaßen transformiert werden: $A_y^s = u_0^s A_x^s$; ihre Verhältnisse sind somit Invarianten der Trajektorienflächen der Gruppe und gestatten, die Gleichungen solcher Flächen aufzuschreiben. — Im § 4 werden schließlich in den Räumen $S_s (y_{s-1} = \dots = y_n = 0)$ die Hyperflächen $A_y^s = 0$ betrachtet; sie können als eine Verallgemeinerung der Cayleyschen kubischen Regelfläche betrachtet werden.

Eugenio Giuseppe Togliatti.

Stubban, John Olav: Sur les transformations quasi-involutives dans la géométrie de direction. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 19, Nr. 11, 37—39 (1947).

Si J est la transformation linéaire du plan qui transforme une semi-droite dans la semi-droite opposée et T une transformation birationnelle entre les semi-droites, T sera dite quasi-involutive si l'on a $T^2 = J$. Pour que T soit quasi-involutive, il faut et il suffit que deux semi-droites homologues soient orthogonales, que toutes les semi-droites fondamentales de T soient identiques à celles de T^{-1} et que deux semi-droites fondamentales se correspondant dans T^2 soient opposées.

Lucien Godeaux.

Müller, Hans Robert: Über eine infinitesimale kinematische Abbildung. Monatsh. Math. 54, 108—129 (1950).

Die bekannte Zuordnung der Speere des euklidischen Raumes zu den dualen Einheitsvektoren wird auf anschaulichste Weise als Abbildung auf die infinitesimalen Vektoren in der Fläche einer Einheitskugel oder auf die geordneten Paare benachbarter Punkte auf dieser gedeutet. Den Bewegungen im euklidischen Strahlraum entsprechen dann Transformationen dieser Kugel in sich, die die sphärischen Abstände der Bildpunktpaare invariant lassen; es werden einfache Bedingungen für senkrechte und parallele Gerade aufgestellt. Den Strahlen eines eigentlichen Büschels sind benachbarte, isometrisch aufeinander bezogene Großkreise der Kugel zugeordnet; das Bild eines Parallelstrahlenbüschels ist besonders einfach. Den Regulussen einer Quadrik entsprechen zwei zu einem sphärischen Kegelschnitt benachbarte, konfokale Kegelschnitte; der Fall der Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloids wird eigens behandelt. Als Bild eines eigentlichen Strahlenbündels ergibt sich eine infinitesimale Bewegung der Kugel in sich. Eine solche Transformation läßt sich daher auch als Bild eines Raumpunktes ansehen. Einem Parallelstrahlenbündel entspricht ein Punkt der Kugelfläche mit den von ihm ausstrahlenden Linienelementen. Ebenso wird die Abbildung eines ebenen Strahlenfeldes studiert. Das Bild eines Strahlennetzes (lineare Kongruenz) wird mit der bifokalen Verwandtschaft von Burmester in Analogie gesetzt. Sehr anschaulich sind auch die Bilder von Strahlgebüsch (spezieller linearer Komplex) und -gewinden (allgemeiner linearer Komplex). Differentialgeometrische Überlegungen führen zu den Bildern der Regelflächen, speziell der Torsen, insbesondere der Kegel, sowie der Strahlenkongruenzen, speziell der Normalensysteme und der isotropen, parabolischen, der Guichardschen und der pseudosphärischen Strahlensysteme. Schließlich werden noch stetige infinitesimale Bewegungen der Bildkugel mit Hilfe der Biquaternionen untersucht.

Frank Löbell.

Haruki, Hiroshi: On Ivory's theorem. Math. Japon. 1, 151 (1949).

Verf. zeigt, daß die Ivorysche Eigenschaft für die konfokalen Kegelschnitte charakteristisch ist, indem er alle ganzen Funktionen $w = g(z)$ bestimmt, welche die achsenparallelen Geraden der z -Ebene auf eine Doppelkurvenschar mit der Ivoryschen Eigenschaft [jedes aus diesen Kurven aufgespannte (krummlinige) Rechteck hat gleich lange Diagonalstrecken] abbilden.

Georg Aumann.

Lorent, H.: Courbes construites à partir d'une conique fixe et d'un faisceau de coniques liées à la donnée. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 19, 131—140 (1950).

Verf. behandelt (in rechtwinkligen Koordinaten) einige Fälle des folgenden allgemeinen Problems: Ein Punkt A durchläuft einen gegebenen Kegelschnitt C_1 . Ein anderer Kegelschnitt C_2 , der einem Büschel angehört und durch eine vom Punkt A abhängige Bedingung bestimmt ist, wird von der in A an C_1 gelegten Tangente im Punkt B geschnitten. Man sucht den geometrischen Ort von B . Die untersuchten Fälle sind folgende: a) C_2 geht durch A ; b) C_2 geht durch einen Punkt, dessen Koordinaten lineare Funktionen derjenigen des Punktes A sind; c) C_2 zer-

fällt in zwei zueinander rechtwinklige Geraden, die durch den Ursprung O des Koordinatensystems gehen und deren Winkel von O halbiert wird; d) C_2 hat die x -Achse des Koordinatensystems als Symmetrieachse und die Projektion von A auf die x -Achse als Mittelpunkt, Scheitel oder Brennpunkt. — Für jeden dieser vier Fälle werden einige Beispiele (insgesamt 13) durchgerechnet, wobei für C_1 , in den Fällen a), b), d) auch für C_2 , spezielle Kegelschnitte gewählt sind. Die Gleichungen der Ortskurven, deren Grad je nach der Wahl der Kegelschnitte von 2 bis 12 variiert, werden kurz diskutiert. Zum Schluß werden Abwandlungen und Ausdehnungen der Problemstellung auf solche Fälle angedeutet, in denen z. B. die Tangente in A durch die Normale ersetzt ist, statt der Kegelschnitte C_1 und C_2 Kurven höheren Grades gewählt werden, usw. Endlich wird auf ein entsprechendes Problem im dreidimensionalen Raum hingewiesen, bei dem statt der Kegelschnitte Flächen zweiter Ordnung ins Spiel kommen. Die dabei erforderlichen Rechnungen sind umständlich und zeitraubend und nur in sehr speziellen Fällen durchführbar.

Eugen Löffler.

Emersleben, Otto: Die maximale Wurfweite auf horizontalen Ebenen bzw. konzentrischen Kugelflächen. Technik 1950, 601—606 (1950).

Verf. gibt eine sehr einfache Methode zur Bestimmung der größten Reichweite von Flüssigkeitsstrahlen u. dgl. an und beweist u. a.: Wenn als Vergleichsfläche eine horizontale Ebene π vorausgesetzt wird, ergibt sich die maximale Wurfweite (exakt!) als Summe aus der maximalen horizontalen Wurfweite und dem Höhenunterschied zwischen dem Anfangspunkt und π . Wenn als Vergleichsfläche eine Kugel gewählt wird, gilt dieselbe Beziehung in sinngemäßer Verallgemeinerung. Die Beweisführung stützt sich u. a. auf Enveloppeneigenschaften von Kegelschnitten, die Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 35, 97) abgeleitet hat.

Heinz Horninger.

Algebraische Geometrie:

● **Welchman, W. Gordon:** Introduction to algebraic geometry. Cambridge: At the University Press 1950. 384 p., 37 diagrams. 25 s. net.

Šilov, G. E.: Die singulären Punkte algebraischer Kurven in der Ebene. Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 5 (39), 180—192 (1950) [Russisch].

In der Theorie der algebraischen Funktionen kennt man die Reihenentwicklungen nach Puiseux, die auf dem Grundgedanken des Newtonschen Polygons aufbauen. Verf. greift diese alten Dinge wieder auf und gibt Entwicklungen reeller Zweige einer Kurve $f = \sum a_{k,l} x^{k/l} y^{j/l} = 0$. Hierin werden nur die k_i als ganz, die l_j aber als beliebig reell vorausgesetzt, d. h. die Kurven sind allgemeiner als die algebraischen. Dem Gliede $x^{k_i} y^{j_i}$ wird dann die Gerade $n = k_i + r l_j$ zugeordnet, und aus Stücken solcher Geraden ein Polygon gebildet, d. h. dual zu Puiseux vorgegangen. Den ersten Exponenten r der Reihenentwicklung $y = A x^r (1 + y_1)$ bestimmt man dann aus dem Polygon in üblicher Weise. Für die Errechnung von A zu den möglichen r ergibt sich eine algebraische Gleichung, deren reelle Wurzeln von Wichtigkeit sind. Zur Bestimmung der weiteren Glieder ist das Verfahren zu iterieren. Erläutert wird alles an den Beispielen: $x^4 + x^3 y - y^3 - x y = 0$ und $x y^8 + y^6 - 2 y^5 + y^4 + x y^3 - 2 x^3 y^2 + x^5 y - x^9 = 0$. *Werner Burau.*

Sario, Angela de: Sulle curve algebriche piane dette „Perle“. Ann. Univ. Ferrara 8, 34 S. (1950).

L'A. commence par déterminer l'abaissement du nombre des points d'inflexion d'une courbe algébrique plane produit par la présence d'un point O multiple d'ordre r , en lequel les r tangentes sont confondues, chacune de celles-ci rencontrant la courbe en $s \geq r$ points confondus en O . Il applique ce résultat aux courbes appelées „perles“ par R. de Sluse et détermine également les axes de symétrie de ces dernières courbes.

Lucien Godeaux.

Galafassi, Vittorio Emanuele: I tactinvarianti nella topologia dello spazio proiettivo. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 3, 18—25 (1948).

L'A. in questa Nota indaga in quali casi il segno del tactinvarianté di due superficie algebriche reali abbia significato topologico. — Dimostra che: 1. il numero dei

circuiti di una C^m priva di singolarità, intersezione di due superficie generali, reali, di ordine n e m aventi la stessa parità, è pari o dispari secondo che il tactinvariante ha un dato segno oppure il segno opposto; 2. per n e m di parità diversa, tale segno invece è inessenziale, non potendosi attribuire ad esso alcun significato topologico; 3. nel caso del tactinvariante di tre superficie algebriche generali di ordini n_1, n_2, n_3 , o ciò che è lo stesso, del gruppo algebrico G delle $N = n_1 n_2 n_3$ loro intersezioni, il segno di esso è legato al numero r dei punti reali di G , inquantochè ogni cambiamento del detto segno muta di due unità il numero r .

Margherita Piazzolla Beloch.

Richmond, Herbert W.: A note upon an arithmetical property of quartic surfaces. J. London math. Soc. 32, 6—8 (1948).

Verf. schließt an eine Arbeit von B. Segre [Proc. London math. Soc. (2) 49, 353—395 (1947)] an. Ist P ein Punkt einer Fläche 4. Ordnung im Raum, so bedarf es zur Bestimmung der Asymptotenrichtungen der Lösung einer quadratischen Gleichung. Ist deren Diskriminante ein Quadrat, so sind die Koeffizienten der Gleichungen der Tangenten an die Asymptotenlinien rational, und diese schneiden die Fläche in je einem von P verschiedenen Punkt, dessen Koordinaten von denen von P rational abhängen. Verf. sucht nun allgemeine Bedingungen dafür, daß jene Diskriminante ein Quadrat sei. Hat die Gleichung der Fläche die Form $F(x, y) = G(z, w)$, so ist notwendig und hinreichend, daß die Hessesche Form von F und von G ein Quadrat sei. Dies wiederum ist der Fall, wenn F bzw. G selbst ein Quadrat ist oder wenn ihre Invariante 3. Grades verschwindet, wenn sie sich also als Summe zweier 4. Potenzen darstellen lassen.

Ott-Heinrich Keller.

Samuel, P.: Les méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique. Bull. Soc. math. Belgique 1949—1950, 11—17 (1950).

Verf. entwickelt in einem Vortrag einige Ideen über die algebraische Geometrie, die einen Teil der „kommutativen Algebra“ vorstelle. Einer algebraischen Mannigfaltigkeit entspricht ein Körper algebraischer Funktionen $k(x)$ über dem Grundkörper k mit der „allgemeinen Nullstelle“ (x) (van der Waerden). Zwei Mannigfaltigkeiten über demselben Grundkörper sind „absolut birational“ äquivalent, wenn ihre Körper $k(x)$ und $k(y)$ identisch sind. Die direkte Untersuchung des algebraischen Funktionenkörpers, ohne eine besondere Mannigfaltigkeit als Modell zugrunde zu legen, wäre am folgerichtigsten, aber bis jetzt noch kaum in Angriff genommen. (Das dürfte nach Ansicht des Ref. wohl solange nicht möglich sein, als für die Definition eines algebraischen Funktionenkörpers notwendig ein spezielles Modell herangezogen werden muß.) Dazu kommt die Schwierigkeit, daß die Existenz eines singularitätenfreien Modells bei höheren Dimensionen, die gewöhnlich vorausgesetzt werden muß, bis jetzt noch nicht bewiesen werden konnte. „Beschränkte birationale“ Äquivalenz liegt dann vor, wenn nicht nur die Körper $k(x)$ und $k(y)$, sondern auch die Ringe $k[x]$ und $k[y]$ identisch sind. Hier sei die Schnittmultiplizität eine Invariante, worauf die Theorie der linearen Systeme aufgebaut werden könne. Vom projektiven Gesichtspunkt endlich seien die Einführung neuartiger Koordinaten (Chow und van der Waerden, dies. Zbl. 16, 40), sowie die interessanten Beispiele von Mannigfaltigkeiten (Segre, Graßmann, Veronese, Lie) zu bemerken.

Wolfgang Gröbner.

Muhly, H. T. and O. Zariski: Hilbert's characteristic function and the arithmetic genus of an algebraic variety. Trans. Amer. math. Soc. 69, 78—88 (1950).

Verff. definieren als „virtuelles arithmetisches Geschlecht“ $p_a(W)$ einer normalen Mannigfaltigkeit W der Dimension r , die durch ein homogenes Primideal \mathfrak{p} repräsentiert wird, die (ganze) Zahl $(-1)^r(a_0 - 1)$, wo a_0 der erste Koeffizient der Hilbertfunktion $\chi(n; \mathfrak{p}) = \sum a_i C_{n,i}$ ist. Das wichtigste Ergebnis der Arbeit ist der Nachweis, daß für zwei singularitätenfreie Modelle U, V eines und desselben algebraischen Funktionenkörpers Σ der Dimension 2 oder 3 immer $p_a(U) = p_a(V)$ gilt (Satz 3), so daß diese Zahl nicht so sehr eine Charakteristik des speziellen Modells, als vielmehr eine solche des Körpers Σ ist und deshalb das „arithmetische Geschlecht“ $p_a(\Sigma)$ des Körpers Σ genannt wird. — Zum Beweise betrachten Verff. das bihomogene Ideal \mathfrak{a} in $k[X_0, \dots, X_r; Y_0, \dots, Y_h]$, das alle Formen enthält, welche nach Einsetzen der homogenen Koordinaten (x_0, \dots, x_r) von U , (y_0, \dots, y_h) von V verschwinden, und dessen Hilbertfunktion $\chi(m, n; \mathfrak{a}) = \sum a_{i,j} C_{m,i} C_{n,j}$ [van der Waerden, Akad. Wet. Amsterdam, Proc. 31, 749—770 (1928)]. Verff. zeigen, daß der oben mit a_0 bezeichnete Koeffizient der Hilbertfunktion von U (bzw. V) unter gewissen Voraussetzungen gleich dem Koeffizienten a_{00} von $\chi(m, n; \mathfrak{a})$ ist; daher ist immer $p_a(U) = p_a(V)$, wenn die birationale Transformation $U \leftrightarrow V$ in beiden Richtungen „proper“ ist (Satz 2). (Verff. nennen eine birationale Transformation $U \rightarrow V$ „proper“,

wenn V normal ist und fast alle linearen Schnitte von U auf normale Untermannigfaltigkeiten von V abgebildet werden.) Bei den Dimensionen 2 und 3 zeigen Verff. mit Benützung früherer, (dem Ref. nicht zugänglicher) Arbeiten (O. Zariski, Ann. of Math., II. Ser. 43, 583—593 (1942), 45, 472—542 (1944)), daß eine quadratische oder eine nichtsinguläre monoidale Transformation $U \rightarrow V$ immer „proper“ ist, falls nur U und V singularitätenfrei sind. Daraus folgt das bereits erwähnte Hauptergebnis. Für Flächen wird es noch dahin präzisiert, daß immer $\rho_a(U) \geq \rho_a(\Sigma)$ ist (Satz 4), falls U ein beliebiges normales Modell von Σ ist.

Wolfgang Gröbner.

Roth, Leonard: Some arithmetical questions in the theory of the base. Ann.

Mat. pura appl., IV. Ser. 27, 115—134 (1948).

Data una varietà algebrica V_k ($k \geq 2$) di numero base $\varrho \geq 2$, una trasformazione birazionale τ senza eccezioni di V_k in sè dà luogo ad un automorfismo aritmetico della forma fondamentale $f(x, y, z, \dots) \equiv [(xA + yB + zC + \dots)^k]$ esprimente il grado virtuale della varietà $\tau A + yB + zC + \dots, A, B, C, \dots$ essendo le varietà a $k-1$ dimensioni d'una base intermedia di V_k . Questo automorfismo può essere l'automorfismo identico senza che sia di necessità identica la τ nè viceversa ad ogni automorfismo aritmetico di f corrisponde sempre una trasformazione birazionale di V_k in sè. — Nel presente lavoro l'A. sviluppa anzitutto alcuni esempi critici atti a mettere in luce queste circostanze e si accinge poi a rintracciare su una vasta messe di esempi la presenza di trasformazioni birazionali su V_k dalla conoscenza degli automorfismi aritmetici della f . — Nella prima parte del lavoro, si considerano esempi di superficie ($k=2$) a numero base $\varrho=2, 3$: la superficie intersezione della V_4 di Segre di S_8 , immagine del prodotto di due piani, con una quadrica di un S_7 subordinato (è una superficie d'ordine 12 con $\varrho=2$ e con tutti i generi uguali all'unità, possedente un gruppo infinito discontinuo di trasformazioni birazionali in sè, ripercuotendosi in automorfismi aritmetici non identici di f); la superficie generica del 4° ordine di S_3 contenente due nodi (è $\varrho=3$; anch'essa possiede un gruppo infinito discontinuo di trasformazioni birazionali); l'intersezione di 3 iperquadriche di S_5 aventi due rette sghembe a comune (superficie dell'ottavo ordine con $\varrho=3$ e tutti i generi unitari, anch'essa con un gruppo infinito discontinuo di trasformazioni birazionali in sè). — Nella seconda parte si considerano esempi di varietà a 3 dimensioni ($k=3$) a numero base $\varrho=2, 3$: la V_3 rappresentabile sullo S_3 per mezzo delle superficie d'ordine > 3 per una sestica di genere 3 (è $\varrho=2$, f possiede un numero finito di automorfismi aritmetici, uno solo dei quali proviene da una trasformazione birazionale di V_3 in sè); la V_3 rappresentabile sullo S_3 per mezzo delle superficie d'ordine > 3 passanti per una sestica di genere 3 e per un ulteriore punto base (è $\varrho=3$, un solo automorfismo aritmetico di f che proviene da una trasformazione birazionale di V_3 in sè); la V_3 prodotto di una superficie a numero base 2 del tipo considerato nella prima parte e d'una curva ($\varrho=3$; vi è un gruppo infinito discontinuo di trasformazioni birazionali che provengono da automorfismi aritmetici di f). — Nella terza parte si considerano esempi di varietà a 4 dimensioni ($k=4$) con numero base $\varrho=2$. Se f ha discriminante non nullo, si può dedurre la presenza in generale di automorfismi di f provenienti da trasformazioni birazionali prive di eccezioni della varietà in sè. — Considerazioni vengono svolte su esempi per mostrare come i precedenti metodi di ricerca vengano perturbati se vi sono trasformazioni birazionali con eccezioni. Si fanno altresì applicazioni allo studio delle varietà fondamentali delle trasformazioni cremoniane di S_3 e di S_4 . — L'analisi per la determinazione degli automorfismi aritmetici della forma f viene svolta secondo i concetti sviluppati da B. Segre [Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 5, 7—68 (1946)].

Fabio Conforto.

Andreotti, Aldo: Sopra le superficie algebriche che posseggono trasformazioni birazionali in sè. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 9, 255—279 (1950).

L'A. établit une limite supérieure pour l'ordre du groupe des transformations birationnelles en soi d'une surface algébrique de genre linéaire $p^{(1)} > 1$, dépendant du genre linéaire, de l'invariant de Zeuthen-Segre et du k -genre de la surface, puis une limite supérieure de l'ordre d'une transformation birationnelle en soi d'une surface irrégulière privée d'un faisceau de genre égal à l'irrégularité de la surface, en fonction de l'irrégularité et de l'invariant de Zeuthen-Segre (la méthode, dans le second cas, est basée sur l'utilisation des relations d'Hurwitz sur les correspondances). Dans le cas où la surface possède un faisceau de genre égal à l'irrégularité, supposée supérieure à l'unité, la limite supérieure obtenue ne dépend que de l'invariant de Z.-S. Si une surface irrégulière F n'est pas une surface de Picard, à une transformation birationnelle de F en soi correspond une transformation hermitienne de la variété de Picard des périodes des intégrales de F .

Lucien Godeaux.

Godeaux, Lucien: Osservazioni sui punti uniti delle involuzioni cicliche appartenenti ad una superficie algebrica. Rend. Mat. Appl., V. Ser. 9, 70—73 (1950).

Sur une surface algébrique F sans points singuliers, possédant une involution

cyclique d'ordre premier p dotée de points unis isolés, l'A. nommait point uni parfait, un point uni dans le voisinage du premier ordre duquel, la transformation T génératrice de l'involution déterminait l'identité. Cette terminologie n'étant pas conforme à celle adoptée par Severi (Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche, Roma 1942; ce Zbl. 28, 79) pour lequel toute coïncidence isolée est en son sens parfaite, l'A. propose de nommer son point uni parfait, point uni de 1^o espèce ou hypercoïncidence (terminologie de Severi) et point uni de 2^o espèce le point uni dans le voisinage duquel T engendre une homographie d'ordre p . — Si le point uni est de seconde espèce, il est origine d'un „arbre“ de points unis dans les voisinages successifs. Il est possible de tirer de cet arbre une succession de points unis sans jamais arriver à un de 1^o espèce. L'A. donne un exemple: l'involution plane $x': y': z' = x: \varepsilon y: \varepsilon^2 z$ ($\varepsilon^7 = 1$); au point O_1 ($y = z = 0$) il y a deux points unis voisins O_{12} sur $y = 0$ de 1^o espèce et O_{13} sur $z = 0$ de seconde espèce. Si l'on poursuit la décomposition, on trouve que le point O_{13222} a une structure analogue à celle de O_1 .
Bernard d'Orgeval.

Godeaux, Lucien: Points unis symétriques des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 34, 843—845 (1948).

L'A. complète le résultat de la première Note sur le même sujet (ce Zbl. 25, 321) en utilisant des méthodes récemment établies (ce Zbl. 33, 129, 34, 245).

M. Piazzolla Beloch.

Godeaux, Lucien: Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples. V. VI. VII. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 35, 636—641, 828—833, 834—840 (1949).

(I^{ère}—IV^{ème} parties v. ce Zbl. 36, 376, 377.) — V. L'A. donne des exemples d'une surface multiple où le cône tangent en un point de diramation isolé se compose de quatre parties. — Un premier exemple; en conservant les notations des Notes précédentes, correspond aux valeurs $p = 41$, $\alpha = 25$, $\beta = 23$. Un autre exemple est donné par $p = 61$, $\alpha = 37$, $\beta = 33$. — VI. L'A. considère le deuxième exemple indiqué dans la Note précédente. — VII. L'A. établit le théorème suivant: En un point de diramation isolé d'une surface Φ , image d'une involution cyclique de période p appartenant à une surface F , p étant premier et supérieur à deux, si le cône tangent possède au plus des droites doubles, ce cône se décompose en quatre cônes rationnels au plus.

M. Piazzolla Beloch.

Predonzan, Arno: Intorno alle involuzioni piane $I_n^{2(n-1)}$. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 9, 32—38 (1950).

Verf. untersucht die, nach B. Segre (dies. Zbl. 32, 117) definierten, ebenen Involutionen $I_n^{2(n-1)}$ ($n \geq 3$) und beweist: Wenn die residuale I_2^2 einer allgemeinen Punktgruppe G_{n-2} der Ebene in bezug auf eine solche $I_n^{2(n-1)}$ eine Kurve von Koinzidenzen besitzt, die eine irreduktible und von G_{n-2} unabhängige Komponente F hat, so ist die I_2^2 vom De-Jonquièresschen Typus (d. h. die I_2^2 besitzt ein invariantes Büschel von rationalen Kurven, die elementweise in sich transformiert werden) und F ist durch eine Cremonatransformation in eine Gerade überführbar. Der Beweis wird, vom Falle $n = 3$ ausgehend, durch Induktion geführt.

Fabio Conforto.

Biarge, Julio Fernández: Koinzidenzen in einer algebraischen Korrespondenz. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 10, 160—170 (1950) [Spanisch].

The author extends to algebraic correspondences the considerations and results of his previous paper about birational correspondences (this Zbl. 38, 317).

Germán Ancochea.

Andreotti, Aldo: Sopra alcune superficie algebriche uniformizzabili. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 8, 569—570 (1950).

Ankündigung einiger Resultate über Uniformisierung (im Großen) von algebraischen Flächen. Mittels Funktionen zweier Veränderlichen mit einem Multiplikationstheorem im Sinne von Poincaré und Picard werden folgende Flächen uniformisiert: die allgemeinste Fläche vierter Ordnung mit zwei (windschiefen oder inzidenten) Geraden: die allgemeinste Fläche von Enriques (mit $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$, $P_3 = 0$). Durch diese Resultate wird eine Vermutung von Picard bestätigt und gezeigt, daß die betrachteten Funktionen eine größere Uniformisierungskraft besitzen als die Abelschen.

Fabio Conforto.

Vektor- und Tensorrechnung:

• Piirko, Z.: Vektoren. Praha: Věd.-techn. nakl. 1950. 172 S. 60 Kčs. [Tschechisch].

Raševskij, P. K.: Die Galoissche Theorie in Körpern geometrischer Objekte. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 7, 167—186 (1949) [Russisch].

Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist der Nachweis, daß alle geometrischen Objekte, die durch eine gegebene Liesche Gruppe in sich transformiert werden, als Funktionen eines derartigen erhalten werden können. Zunächst wird zu Beginn der Begriff des geometrischen Objekts von N Komponenten der Klasse v wiederholt. Es ist ein System analytischer Ortsfunktionen $\varphi_i(x^1, \dots, x^n)$ ($i = 1, \dots, N$), die sich beim Übergang zu anderen Koordinaten \bar{x} nach einem allgemeinen Funktionalgesetz $\varphi' = \Phi(\varphi, \bar{x}_x, \bar{x}_{xx}, \dots)$ transformieren, wobei die Ableitungen der Übergangstransformationen $\bar{x}(x)$ bis zur v -ten vorkommen. Die Transformationen $\bar{x}(x)$ einer Lieschen Gruppe, die endlich oder unendlich sein kann, werden als Lösungen eines Systems $F(x, \bar{x}, \bar{x}_x, \bar{x}_{xx}, \dots) = 0$ definiert. Die Gruppe heißt „rational“, wenn 1. die F in den Ableitungen Polynome mit Koeffizienten, die analytisch von x, \bar{x} abhängen, sind, 2. keine Abhängigkeiten nur zwischen den x und \bar{x} aus dem System folgen. 3. Alle aus dem System durch Differenzieren folgenden Gleichungen von nicht höherer Ableitungsordnung sollen sich auch schon algebraisch aus dem System ergeben. Entsprechend heißt ein geometrisches Objekt rational, wenn seine Transformationsfunktionen die Bedingung 1 erfüllen. Man sagt von einem Objekt, es gestatte die Gruppe, wenn $\Phi(\varphi, \bar{x}_x, \bar{x}_{xx}, \dots) = \varphi(\bar{x})$ für die Gruppentransformationen $\bar{x} = \bar{x}(x)$ gilt. Satz 1 lautet dann: Zu jeder rationalen Liegruppe gibt es stets ein rationales Objekt, das diese Gruppe gestattet. Der Beweis davon erfordert einige Hilfssätze. Zunächst erweist es sich als zweckmäßig, die Gruppentransformationen in Parametergestalt $(x(t), \bar{x}(t))$ zu schreiben, so daß das die Gruppe definierende System die Gestalt $F^*(x, x_t, x_{tt}, \dots; \bar{x}, \bar{x}_t, \bar{x}_{tt}, \dots) = 0$ hat. Die Gruppeneigenschaft kommt darin zum Ausdruck, daß aus $F^*(x, x_t, \dots; y, y_t, \dots) = 0$ und $F^*(y, y_t, \dots; z, z_t, \dots) = 0$ folgt $F^*(x, x_t, \dots; z, z_t, \dots) = 0$. Man kann auch sagen, daß die beiden letzten Systeme hinsichtlich z, z_t, \dots usw. algebraisch äquivalent sind. Hierzu ist wiederum die Gleichheit der Koeffizienten bezüglich der Ableitungen von z notwendig und hinreichend, wie ein Hilfssatz besagt. Unter allen Objekten, die so zu einer Gruppe gehören, gibt es ein besonderes mit der Eigenschaft, daß alle Komponenten eines beliebigen, zur Gruppe gehörigen Objektes sich rational durch die Komponenten davon ausdrücken. Dieser Hauptsatz 2 hat Ähnlichkeit mit dem Satz vom primitiven Element aus der Algebra und gestattet, vom Körper aller zur Gruppe gehörigen Objekte zu sprechen. Beschränkt man sich weiter auf transitive Liesche Gruppen und entsprechend definierte Objektkörper, so läßt sich, analog dem Fundamentalsatz der Galoistheorie, eine Beziehung zwischen transitiven Körpern und rationalen Lieschen Gruppen formulieren, die jeweilig den zugehörigen Körper und nur diesen in sich transformieren.

Werner Burau.

• Bureau, F.: Cinématique. (Université de Liège, Cours de la Faculté des Sciences.) Paris: Mason & Cie. 1948. 142 pp. 79 fig.

Das Buch enthält die hauptsächlich analytische (vektorielle) Darstellung der Kinematik in dem an Hochschulen gewöhnlich gebotenen Ausmaße. — Im 1. Kap. wird die Bewegung eines Punktes mit Anwendungen (Fallbewegung, Schwingungen und Zentralbewegung) behandelt, wobei man es dem Verf. danken wird, daß er auch die für Zentralbewegungen so praktischen Gleichungen von Binet mit berücksichtigt hat. Im 2. und 3. Kap. wird die Kinematik starrer Körper ausführlich behandelt, wobei im Falle der Drehung um einen Punkt auch die Eulerschen Winkel, sowie die Poinsothsche Veranschaulichung durch Wälzkegel, die Bressenschen Kreise und der Beschleunigungspol mit Anwendungen auf Rollkreise (Euler-Savarysche Formel) erklärt werden. Auch die Roberval'sche Tangentenkonstruktion, sowie das Theorem von Boilliier zur Konstruktion von Krümmungsmittelpunkten haben erfreulicherweise Beachtung gefunden. Schließlich wird auch die Relativbewegung (Coriolisbeschleunigung) in anschaulicher Weise vektoriell dargestellt. — Sehr begrüßenswert ist es, daß Verf. im 4. und letzten Kapitel

einzelne Geschwindigkeits- und Beschleunigungs-Konstruktionen dargestellt hat. Bei einer eventuellen Neuauflage sollte dieses Kapitel jedoch entsprechend erweitert werden, so daß die graphische Kinematik etwa in dem Umfange zur Darstellung käme, wie sie an einigen deutschen Hochschulen gelehrt wird (etwa wie in Wittenbauer, Graphische Dynamik u. ä.). — Das Buch kann allen Studierenden an Universitäten und Technischen Hochschulen zur Einführung in die Kinematik empfohlen werden. — Auf Seite 12, 10. Zeile von unten, sollte es heißen: „Ruhe-lage“ (point au repos), nicht aber „Gleichgewichtslage“ (position d'équilibre), da diese beiden Lagen nur im Falle der Ruhe, nicht aber im Bewegungsfalle im allgemeinen übereinstimmen.

Karl Karas.

Reuschel, A.: Fahrzeugbewegungen in der Kolonne. Österreich. Ingenieur-Arch. 4, 193—215 (1950).

Verf. geht bei seinen Betrachtungen von der Verkehrsvorschrift aus, daß die Lücke vor jedem Folgefahrzeug stets gleich sein muß der Summe aus seinem Ruheabstand und jenem Abstand, der ebenso viele Meter beträgt, wie die augenblickliche Fahrgeschwindigkeit des betreffenden Fahrzeugs in km/h (Tachometerabstand) ausmacht. Unter dieser Voraussetzung, sowie bei vorgeschriebenen Ruheabständen in der Fahrzeugkolonne, gegebenem Bewegungsgesetz des Leitfahrzeuges im betrachteten Zeitabschnitt und bekannten Geschwindigkeiten oder Fahrabständen aller Folgefahrzeuge zu Beginn dieses Zeitabschnittes wird der Bewegungsverlauf jedes Folgefahrzeuges ermittelt. Zu diesem Zwecke wird zunächst die lineare inhomogene Differentialgleichung für die Bewegung eines Folgefahrzeuges in Abhängigkeit von der Weg-Zeit-Funktion des vorderen Nachbarwagens angegeben. Das Bewegungsgesetz des r -ten Wagens ermittelt er durch geschickte Ausnutzung eines linearen Differentialoperators auf formalem Wege, wobei für die Bestimmung der Integrationskonstanten zwei voneinander unabhängige Wege angegeben werden, allerdings müssen hierzu aber noch die Zeit-Weg-Gesetze für alle zwischen ihm und dem Leitfahrzeug befindlichen Wagen berechnet werden. Um aber das Bewegungsgesetz des r -ten Wagens unmittelbar darstellen zu können, formt Verf. obige Differentialgleichung um und erhält dadurch die Differentialgleichung und die Zeit-Weg-Funktion, sowie den Geschwindigkeits- und Beschleunigungs-Verlauf für die Bewegung eines Folgefahrzeuges in Abhängigkeit von einer beliebigen Zeit-Weg-Funktion des Leitfahrzeuges, wobei er auch die Fälle erfaßt, daß die Zeit-Weg-Funktion des Leitfahrzeuges ein Polynom bzw. das Leitfahrzeug einer gleichförmig beschleunigten oder verzögerten Bewegung (Anfahren und Abbremsen) unterworfen ist. Dabei erhält er als Sonderfall das Abbremsen der Kolonne, wenn das Leitfahrzeug plötzlich zum Stillstand kommt (Zusammenstoß). An Hand eines Zahlenbeispiels werden die Wege, Geschw.- und Beschl.-Verhältnisse hierbei in Schaubildern für die ersten fünf Wagen veranschaulicht. Abschließend werden noch ein rechnerisches und ein zeichnerisches Näherungsverfahren zur Ermittlung des Bewegungsverlaufes der Folgefahrzeuge angegeben, die rascher zum Ziele führen und wovon das letztere, das im wesentlichen auf die Konstruktion von Schleppkurven hinausläuft, besonders dann angewendet werden kann, wenn auch die Bewegung des Leitfahrzeuges in Form eines Diagramms vorliegt.

Karl Karas.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

● Blaschke, W.: Kreis und Kugel. — Rep. New York: Chelsea Co. 1949. X, 169 p. \$ 3,50.

Matsumura, Soji: Über Flächen und Kurven. LXI. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part I 2, 41—42 (1950).

Bertolini, Fernando: Su alcune superficie ad area minima. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 8, 254—267 (1949).

Etude du problème de la surface de révolution d'aire minima dans le cas où la courbe méridienne est rapportée à une direction normale à l'axe de rotation. L'A. considère successivement le cas où la surface de révolution passe par deux parallèles fixes et celui où elle est assujettie à être tangente, le long d'un parallèle, à un cône fixe.

Th. Lepage.

Süß, Wilhelm: Bestimmung einer Fläche durch die dritte Grundform und die Summe der Hauptkrümmungsradien. Arch. der Math. 2, 103—104 (1950).

Mit Hilfe von Ableitungsgleichungen, die den Weingartenschen und den Gaußschen Gleichungen der Flächentheorie äquivalent sind, wird für den Stützabstand einer Fläche eine elliptische Differentialgleichung aufgestellt; aus ihrer Lösung ergibt sich die Bestimmung einer Fläche aus ihrer dritten Grundform und der Summe ihrer Hauptkrümmungsradien, sobald ein Flächenstreifen gegeben ist.

Frank Löbell.

Backes, F.: Sur les familles de surfaces dont les lignes de courbure ont même projection cylindrique. (Résumé de la conférence faite le 20 mars 1948). Bull. Soc. math. Belgique 1947—1948, 20—23 (1948).

Verf. skizziert in großen Zügen die analytische Behandlung des Problems, Flächenfamilien zu konstruieren, deren Krümmungslinien durch Parallelprojektion (in einer geeigneten festen Richtung) ineinander übergehen. Das Ergebnis der Untersuchung gestattet eine einfache geometrische Kennzeichnung der sphärischen Bilder der Krümmungslinien der Ausgangsfläche. Verwandte Problemstellungen werden dadurch angedeutet, daß die Projektionsstrahlen einem festen Bündel oder einer Strahlkongruenz angehören sollen, deren Torsen die Krümmungslinien ausschneiden.

Hans R. Müller.

Pogorelov, A. V.: Quasi-geodätische Linien auf einer konvexen Fläche. Mat. Sbornik, n. Ser. 25 (67), 275—306 (1949) [Russisch].

Quasigeodätisch heißt eine Kurve auf einer Fläche, wenn jeder ihrer Abschnitte eine nicht negative rechte und eine nicht negative linke Krümmung besitzt. Auf dieser und anderen Begriffsbildungen und auf Ergebnissen, die von A. D. Aleksandrov stammen, werden, in der Mehrzahl als Antwort auf von diesem gestellte Fragen, zahlreiche Sätze über derartige Linien, auch über geodätische im eigentlichen Sinn, bewiesen, die sich zum Teil auf äußere Eigenschaften, d. h. auf solche, für die der die Fläche umgebende euklidische Raum eine Rolle spielt, zum Teil auf innere Eigenschaften beziehen.

Frank Löbell.

Wunderlich, W.: Raumkurven, die pseudogeodätische Linien zweier Kegel sind. Monatsh. Math. 54, 55—70 (1950).

Pseudogeodätisch heißt eine Kurve auf einer Fläche, wenn ihre Schmiegeebenen gegen diese unter einem konstanten Winkel gebeugt sind. Es werden Kurven studiert, die zugleich in bezug auf zwei Kegel diese Eigenschaft besitzen, sowie die mit ihnen in polarem Zusammenhang stehenden Kegelloxodromen. Einer bikonischen Pseudogeodätischen sind auf ihren beiden Kegeln zwei Loxodromen polar zugeordnet, die einander perspektiv-kollinear entsprechen. Es werden Systeme von Loxodromenpaaren untersucht, die in jedem Raumpunkt zwei Linienelemente bestimmen, die sich auf Scharen von Drehflächen anordnen, deren Meridiane berechnet werden; die Loxodromentangenten erfüllen Rotationskongruenzen mit interessanten Eigenschaften. Durch Ausübung einer geeigneten Polarität lassen sich aus den Loxodromen bikonische Pseudogeodätische gewinnen, die bemerkenswerte Eigenschaften besitzen. Schließlich werden zahlreiche Sonderfälle betrachtet.

Frank Löbell.

Baier, Othmar: Eine geometrische Ableitung des Gauß-Bonnetschen Integralsatzes. Arch. der Math. 2, 105—109 (1950).

Der gegebene Beweis des Gauß-Bonnetschen Satzes ist dadurch besonders durchsichtig und anschaulich, daß die betrachteten stetigen Figuren als Grenzfälle von diskontinuierlichen Gebilden aufgefaßt und behandelt werden.

Frank Löbell.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Laptev, G. F.: Invarianter Aufbau der projektiven Differentialgeometrie der Flächen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 65, 121—124 (1949) [Russisch].

Verf. gibt eine Herleitung der Invarianten und invarianten Gebilde einer Fläche im projektiven dreidimensionalen Raum mit Hilfe der Theorie des repère mobile von E. Cartan. Dabei wird nicht, wie üblich, das begleitende Tetraeder schrittweise spezialisiert, sondern die Gesamtheit der Tetraeder erster Ordnung zugrunde gelegt, das sind solche, von deren Ecken φ_i , $i = 0, 1, 2, 3$, φ_0 in dem Flächenpunkt, φ_1 und φ_2 in der Tangentenebene liegen. Außer von den Flächenparametern u, v hängen sie von 11 sekundären Parametern ab, die $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ fixieren. Setzt man $d\varphi_i = \omega_i^j \varphi_j$, so ist $\omega_0^3 = 0$, $d\omega_i^j = [\omega_i^m \omega_m^j]$ und für die Werte 1, 2 der Indizes kann man setzen

$$\omega_i^j = a_{ij} \omega^j + a_{jk} \omega_i^k + a_{lj} (\omega_0^l + \omega_0^3) + b_{ijk} \omega^k + b_{ijk} \omega^k + \dots + c_{ijk} \omega^l \text{ usw.}$$

wobei $\omega^i = \omega_0^i$. Man erhält so eine Folge von Größen a_{ij}, b_{ijk}, \dots , deren jede in sämtlichen Indizes symmetrisch ist. Hält man nun u und v fest, so daß $du = dv = 0$, $\omega^1 = \omega^2 = 0$, so hängen in den obigen Gleichungen sämtliche Differentiale nur noch von den sekundären Parametern ab, jede stellt mit den vorangehenden zusammen ein vollständiges Pfaffsches System dar, das eine Darstellung liefert der Untergruppe derjenigen projektiven Transformationen, die die Be-

gleitetaeder erster Ordnung an der fraglichen Stelle ineinander überführen. Durch algebraische Prozesse kann man dann aus den aufgestellten Größen in jeder Ordnung die entsprechenden Flächeninvarianten gewinnen. — Das Verfahren hat den Vorzug, daß man durch Spezialisierung beispielsweise das metrische Begleitreibein erhält. Es läßt sich bei einer beliebigen Kleinschen Gruppe und auch für Hyperflächen anwenden.

Gerrit Bol.

Bol, G.: Zur tensoriellen Behandlung der projektiven Flächentheorie. Math. Ann. 122, 279—295 (1950).

Le difficoltà della geometria proiettivo-differenziale nascono dall'arbitrarietà del fattore di proporzionalità o di normalizzazione delle coordinate omogenee, cioè nel passaggio da x a $x^* = \varrho x$. — Introdotto un vettore s_λ che dipenda dalle coordinate in modo che $s_\lambda^* = s_\lambda - \partial_\lambda \log \varrho$ si definisce una derivazione seminvariante $x_\lambda = \partial_\lambda x + s_\lambda x$ tale che $x_\lambda^* = \varrho x_\lambda$; e in generale per una grandezza Φ tale che $\Phi^* = \varrho^c \Phi$ la derivazione $\bar{\nabla}_\mu \Phi = \nabla_\mu \Phi + c s_\mu \Phi$ tale che $(\bar{\nabla}_\mu \Phi)^* = \varrho^c \bar{\nabla}_\mu \Phi$ ove ∇_μ indica l'ordinaria derivazione covariante rispetto ad una data connessione affine. Le formole di commutazione per le derivate seconde $\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\lambda$ pongono in evidenza il tensore $S_{\mu\lambda} = \partial_{[\mu} s_{\lambda]}$ il cui annullarsi è condizione necessaria e sufficiente affinché ϱ possa determinarsi in modo che $s_\mu^* = 0$. — Sviluppato il calcolo relativo a questa operazione, l'A. ne applica i risultati alla teoria delle ipersuperficie in uno spazio proiettivo. Due ipersuperficie, una puntuale e una tangenziale, poste in corrispondenza determinano un tensore doppio di Weyl. Con questi strumenti è possibile ritrovare in forma unitaria ed elegante molti risultati noti nella geometria proiettiva differenziale delle superficie.

Enrico Bompiani.

Čech, Eduard: Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces. I. II. III. Časopis Mat. Fys. 74, Nr. 2, 32—46, 75, 123—135, 137—157 (1950).

Oggetto di questi tre lavori è lo studio delle corrispondenze puntuali T fra spazi proiettivi S_n, S'_n . Punti corrispondenti A in S_n , B in S'_n si pensano funzioni di n parametri (principali) $u_i, i = 1, \dots, n$ e sono dati in coordinate omogenee; a ciascuno di essi si associa un riferimento i cui vertici ulteriori s'indicano con $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$. I fattori di proporzionalità di A, B e le coordinate degli altri vertici si dicono parametri secondari. — S'introducono in modo ovvio le omografie tangenti ∞^n relative alla coppia A, B . Se A_i, B_i si corrispondono in un'omografia tangente K si possono introdurre forme di Pfaff tali che $dA = \omega_{00} A + \omega_1 A_1 + \dots + \omega_n A_n$, $dB = \bar{\omega}_{00} B + \bar{\omega}_1 B_1 + \dots + \bar{\omega}_n B_n$ (ω_i combinazioni lineari indipendenti dei du_i) e

$\Omega_i = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n c_{rs}^i \omega_r \omega_s, c_{rs}^i = c_{sr}^i$. — Le ω_i definiscono una coppia di rette corrispondenti per

A e per B ; le Ω_i possono pure assumersi a definire una retta per A e una per B . La trasformazione $\omega \rightarrow \Omega$ è detta trasformazione K -linearizzante e la retta Ω retta K -linearizzante della retta ω ; una ω per cui $\Omega_i = 0$ è detta K -principale; se ω coincide con Ω è detta caratteristica (nozione indipendente dalla scelta di K). — Condizione necessaria e sufficiente affinché data una curva Γ per A le curve $K \Gamma$ e $\Gamma' = T \Gamma$ in B abbiano contatto analitico o geometrico del 2° ordine è che la tangente a Γ in A sia una retta K -principale o caratteristica. Ad una Γ uscente da A con tangente ω di flesso corrisponde una Γ' il cui piano osculatore è detto piano linearizzante di ω . — Le c_{rs}^i non sono univocamente definite da K e può farsi

$\sum_{r=1}^n c_{rs}^i = 0$. — Se $n = 1$ si ha un invariante infinitesimo, indipendente dal riferimento, detto

elemento differenziale proiettivo della corrispondenza fra le due rette; esso è nullo se la corrispondenza è un'omografia. Se $n > 1$ la corrispondenza è un'omografia se e solo se tutte le rette sono caratteristiche. — Se $\Omega_i = a_i \Omega$ con Ω forma quadratica non identicamente nulla, una retta ω per cui $\Omega = 0$ è detta K -principale; queste rette descrivono un cono quadrico K -principale. Ad una retta ω non principale corrisponde una sola retta (a_i) detta retta totalmente K -linearizzante. — Si pone il problema di trovare le corrispondenze per cui esiste un'omografia tangente K che dia luogo ad una retta totalmente K -linearizzante (per qualsiasi coppia di punti corrispondenti A, B). — Per $n = 2$ ciò avviene sempre. Per $n > 2$ l'A. studia anzitutto il caso in cui le rette totalmente K -linearizzanti di S_n passano per un punto fisso. Supposti S_n, S'_n appartenenti ad un S_{n+1} se ne dà la costruzione seguente: si fissino in S_{n+1} un'ipersuperficie e due punti non appartenenti ad essa; dato A in S_n si proietti da uno dei punti sull'ipersuperficie; la proiezione del punto ottenuto dall'altro punto fisso su S'_n è il punto B . — Il pro-

blema enunciato sopra ammette una soluzione ben determinata, che si può caratterizzare geometricamente, per $n \geq 4$. Per $n = 3$ oltre a questa soluzione ne esistono altre che vengono pure caratterizzate geometricamente nella Nota III.

Enrico Bompiani.

Longo, Carmelo: Costruzione di calotte regolari tridimensionali del secondo ordine. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 9, 280—292 (1950).

Es werden die Umgebungen 2. Ordnung einer 3-dimensionalen Fläche V_3 : σ_3^2 (der untere Index bezeichnet stets die Dimension) im projektiven Raum S_n betrachtet, wobei für die σ_3^2 die maximale Dimension 9 vorausgesetzt wird (also $n \geq 9$). Verf. zeigt zunächst, daß die durch die Schmiegenebenen an eine feste Tangente erzeugten S_4 , wenn sich die Tangente um den Ursprung dreht, einen Kegel von Del Pezzo V_4^6 erzeugen, dessen Scheitel der Tangentialraum S_3 und dessen Durchmesser-richtung eine Fläche von Veronese F_2^4 ist. — Dann wird für die in σ_3^2 enthaltenen σ_2^2 (das sind die Umgebungen 2. Ordnung einer V_2) u. a. gezeigt: Zwei σ_2^2 gehören dann und nur dann zu einer σ_3^2 , wenn sie ein Linienelement 2. Ordnung E_2 gemeinsam haben. Ferner: Es gibt 16 Flächen von Veronese F_2^4 , die durch 6 Punkte gehen und außerdem drei vorgegebene S_1 , die je ein Paar der 6 Punkte enthalten, also Doppel-Tangentialmannigfaltigkeit besitzen. Hiermit wird aus 6 E_2 , die durch einen Punkt gehen, eine σ_3^2 konstruiert.

Wilhelm Klingenberg.

Wu, George: An note on the asymptotic chord quadrics of a surface. Sci. Record 2, 345—350 (1949).

Let σ be a surface of the ordinary projective space with the asymptotic parameters u, v , C a regular curve on σ , P_0 a fixed and P a variable point on C . The asymptotic curve u (or v) through P_0 and the asymptotic curve v (or u) through P intersect in a point (provided P and P_0 are sufficiently near) whose join with P describes, varying P on C , a ruled surface. Its osculating quadric at P_0 is called the „asymptotic chords quadric“ of C at P_0 , and there are two such quadrics [Bompiani, Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VI. Ser. 9, 288—294 (1929)]. These quadrics Q_u, Q_v depend on the element of the second order E_2 of C at P_0 . Let us consider the conic section of Q_u with the osculating plane of E_2 : varying E_2 keeping its tangent E_1 fixed this conic describes a quadric \bar{Q}_u (determined by E_1). Similarly we get \bar{Q}_v . These are called by the author the „derived asymptotic quadrics“. If E_1 is an asymptotic tangent its two derived quadrics approach a single quadric of the Darboux pencil. \bar{Q}_u, \bar{Q}_v intersect also in a conic (not through P_0) whose plane is determined by E_1 : the three planes determined by the three elements E_1 of a Darboux or Segre curve at P_0 determine a canonical line. Further geometric consequences are derived from the consideration of the asymptotic chords quadrics.

Enrico Bompiani.

Süß, Wilhelm: Eichflächenprinzipien in der projektiven Flächentheorie. J. reine angew. Math 188, 100—111 (1950).

L'A. si propone di dare un'estensione al campo proiettivo della teoria „relativa“ di L. Berwald (per lo spazio euclideo-affine). Questa teoria è indicata come „relativa“ perchè in essa si considera una superficie, descritta da un punto $x(u^1, u^2)$ e involupata da un piano $X(u^1, u^2)$ dello spazio proiettivo, relativamente a due superficie di paragone (Eichflächen) descritte una dal punto $e(u^1, u^2)$ l'altra involupata dal piano $\mathcal{E}(u^1, u^2)$ e poste in corrispondenza con quella descritta da x . Le condizioni di appartenenza allo spazio tridimensionale dei punti e dei piani derivati di quelli dati forniscono le equazioni fondamentali della teoria, per le quali devono poi esser soddisfatte le condizioni d'integrabilità. — Se si considerano la congruenza di rette congiungenti punti corrispondenti x, e o intersezioni di piani corrispondenti X, \mathcal{E} le loro sviluppabili (se non sono indeterminate; caso delle sfere relative) determinano due specie di linee di curvatura. — L'ordinaria teoria proiettiva delle superficie (Fubini-Čech) si ottiene prendendo come retta xe (ovv. $X\mathcal{E}$) la prima (ovv. la seconda) normale proiettiva di Fubini. — Il problema della coincidenza delle due specie di linee di curvatura porta a riconoscere che in questo caso si possono far coincidere le due superficie di paragone e che le superficie x, e (coincidente come involuppo con \mathcal{E}) sono in relazione reciproca già considerata da L. P. Eisenhart (Transformation of surfaces, Princeton 1923). — Ciascuna delle superficie di paragone permette di definire un elemento d'area (invariante per proiettività unimodulari) e quindi di definire superficie minime proiettive relative di due specie. — Nel caso di coincidenza delle superficie di confronto e per superficie minime di una specie che siano sfere proiettive dell'altra specie si trova un'estensione al caso attuale delle superficie estremali aggiunte secondo A. Haar ed L. Berwald.

Enrico Bompiani.

Tanturri, G.: Alcune proprietà proiettive di sistemi ∞^5 di curve nello spazio. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 9, 145—172 (1950).

Let x, y, z be non-homogeneous projective coordinates in a projective space of three dimensions. A system of differential equations $y''' = c(x, y, z, y', z', y'')$, $z'' = \beta(x, y, z, y', z', y'')$ where x is the independent variable determines, by integration, a system of ∞^5 curves. The author gives projective characterization of some types of such systems.

$$[P_1] \quad y''' = c(x, y, z, y', z', y''); \quad z'' = K(x, y, z, y', z') y'' + H(x, y, z, y', z')$$

with H not identically zero. System $[P_1]$ is characterized by the following facts: the element of the second order E_2 of the integral curves through a point A and with a given tangent t form a pencil [this notion was introduced by E. Bompiani, Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 22, 1—32 (1943)]; every line s in the principal plane of the pencil, passing through A , determines a parabolic cap having s as asymptotic tangent and containing all the elements E_2 of the pencil. A particular type $[P_2]$ is obtained when, varying t , the principal plane describes a conic envelope. Properties of the third order elements E_3 are given. If $H \equiv 0$ the elements E_2 defined by (A, t) belong to a plane. Also systems $y''' \equiv G(x, y, z, y', z') y'' + H(x, y, z, y', z')$, $z'' = K(x, y, z, y', z') y''$ are projectively characterized. These results include many particular cases considered (under a metric aspect) by Kasner, Comenetz, De Cicco, Vassel. An extensive bibliography at the end.

Enrico Bompiani.

Saban, Giacomo: Sulle curve sghembe in uno S_n . Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 9, 309—321 (1950).

Détermination des relations qui existent entre les courbures d'une courbe C d'un espace S_n et celles de la courbe découpée par le lieu des tangentes à C sur un hyperplan osculateur. Applications. Propriétés projectives des sections du cône projetant C d'un de ses points ordinaires et de la développable circonscrite à C par un hyperplan.

Lucien Godeaux.

Backes, Fernand: Sur une figure de référence mobile constituée par cinq sphères non nécessairement orthogonales. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1252—1253 (1950).

Für das Studium gewisser Probleme der Kugelgeometrie wird ein bewegliches Bezugssystem von fünf nicht orthogonalen Kugeln eingeführt; es werden die für seine Verwendung nötigen Formeln in pentasphärischen Koordinaten aufgestellt, und zwar für die Fälle ein- und zweiparametriger Bewegungen. *Frank Löbell.*

Backes, Fernand: Une généralisation des congruences de sphères cycliques. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1569—1571 (1950).

Es wird eine Kongruenz von Kugeln aufgestellt, auf denen sich eine fünffach unendliche Mannigfaltigkeit von Kreisen angeben läßt, die Fokalkugeln mit bestimmten Eigenschaften besitzen; sie wird einer infinitesimalgeometrischen Analyse unterworfen.

Frank Löbell.

Backes, Fernand: Sur les cercles dont les dix coordonnées pentasphériques satisfont à une même équation de Laplace. C. r. Acad. Sci., Paris 231, 106—108 (1950).

Mit Hilfe eines Systems von fünf beweglichen, nicht orthogonalen Kugeln werden Kreiskongruenzen von der Art betrachtet, daß die zehn pentasphärischen Koordinaten des erzeugenden Kreises, der Fokalkugeln besitzt, Lösungen einer und derselben Laplaceschen Gleichung vom hyperbolischen Typus sind; auch über die Kongruenz der Achsen dieser Kreise wird eine Aussage gemacht. *Frank Löbell.*

Matsumura, Soji: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln. LXI. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part I 2, 47—50 (1950).

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Milne-Thomson, L. M.: Tensorrechnung mit direkten Methoden. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. 10, 171—195 (1950) [Spanisch].

Exposition didactique allant jusqu'aux premières notions des espaces à connexion affine et de Riemann. Aucune référence bibliographique. *Germán Ancochea.*

Tomonaga, Yasuro: On Betti numbers of riemannian spaces. *J. math. Soc. Japan* 2, 93—104 (1950).

Der erste Teil der Arbeit behandelt Anwendungen des Prinzips, daß die p -te Bettische Zahl B_p einer orientierbaren, geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit R_n mit positiv definiter Metrik nicht kleiner ist als die Anzahl B'_p der linear unabhängigen schiefsymmetrischen kovarianten Tensoren mit kovarianter Ableitung Null. Ist die Metrik symmetrisch und ist für ein p

$$\{p(p-1)R_{ijk\ell}g_{st} + g_{kl}(2pR_{ijts} - pR_{ij}g_{st} - R_{st}g_{ij})\}\xi^{lis}\xi^{kjt}$$

negativ definit bezüglich 3-Vektoren, so ist $B_p = B'_p$. Die Beweismethode stammt von Bochner (dies. Zbl. 38, 344). Existieren auf R_n m singularitätenfreie Felder paralleler Vektoren, so ist $B_1 \geq m$, $B_{m'} \geq 1$ ($m' \leq m$), $B_{2k} \geq 1$, letzteres nur wenn n gerade. Das Theorem 3 ist falsch, ein Gegenbeispiel ist der projektive Quaternionenraum. — Der zweite Teil behandelt Tensorgleichungen

$$(a) \Delta T_{a_1 \dots a_p} = K_{a_1 \dots a_p}{}^{b_1 \dots b_p} T_{b_1 \dots b_p}, (b) \Delta T_{a_1 \dots a_p} = K_{a_1 \dots a_p}{}^{b_1 \dots b_p} T_{b_1 \dots b_p} + L_{a_1 \dots a_p}.$$

Ist die quadratische Form $K_{a_1 \dots a_p}{}^{b_1 \dots b_p} T_{a_1 \dots a_p} T_{b_1 \dots b_p}$ überall positiv definit, so besitzt (a) keine nicht-triviale Lösung und (b) ist eindeutig lösbar. Ist die Form positiv definit, so muß eine Lösung von (a) den Bedingungen genügen: $T_{a_1 \dots a_p; r} = 0$, $K_{a_1 \dots a_p}{}^{b_1 \dots b_p} T_{b_1 \dots b_p} = 0$. Eine interessante Anwendung hiervon ist: Ist für eine natürliche Zahl p die Form $(p g_{a_1 b_1} R_{a_2 b_2} - p(p-1) R_{a_1 b_1 a_2} \xi^{a_1 a_2 a_3 \dots a_p} \xi^{b_1 b_2 a_3 \dots a_p})$ (so muß es korrekt lauten in (7.3)) überall positiv semidefinit, so ist entweder $B_p = 0$ oder es existiert ein schiefsymmetrischer p -Tensor mit verschwindender kovarianter Ableitung.

H. Guggenheimer.

Kuiper, N. H.: On conformally-flat spaces in the large. *Ann. of Math.*, II. Ser. 50, 916—924 (1949).

Ein Riemannscher Raum wird konform-eben genannt, wenn jeder Punkt einer Umgebung angehört, die konform auf einen ebenen Raum abgebildet werden kann; er erlaubt die Einführung „konform-bevorzugter“ Koordinatensysteme. Es gilt die Verallgemeinerung eines Satzes von Liouville, nach der jede konforme Abbildung eines von „bevorzugten“ Koordinatensystemen überdeckten Gebietes des Raumes auf ein anderes derartiges Gebiet ein Element der Gruppe der Inversionen und Ähnlichkeiten ist; demgemäß kann diese Transformation einfach analytisch ausgedrückt werden. Die Einführung homogener Koordinaten ermöglicht es, Sätze über eindeutige konforme Abbildungen einfach zusammenhängender konform-ebenen Räume sowie des universellen Überlagerungsraumes eines zusammenhängenden konform-ebenen Raumes auszusprechen, ferner Sätze über Räume, die gemäß dem erwähnten Liouvilleschen Satze die Gruppe der konformen Abbildungen zulassen. Schließlich werden noch die Fälle verschiedener Signatur der metrischen Grundform auf ihre besonderen Eigenschaften hin betrachtet.

Frank Löbell.

Jaglom, I. M.: Die tangentielle Metrik in einer zweiparametrischen Familie von Kurven in der Ebene. *Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu* 7, 341—361 (1949) [Russisch].

Nach Analogie der bekannten Tangentialentfernung zweier Kreise in der Lagerregeometrie kann man in einer beliebigen ∞^2 -Schar von Kurven der Ebene Tangentialentfernungen einführen. Ist die Schar in den Linienkoordinaten u, v und den Parametern ξ, η durch die Beziehung $F(u, v, \xi, \eta) = 0$ oder $v = f(u, \xi, \eta)$ gegeben, so errechnet man die Tangentialentfernung zweier benachbarten Kurven (ξ, η) und $(\xi + d\xi, \eta + d\eta)$ als eine Finslersche Me-

trik, die dann gaußisch ist, wenn f eine bestimmte Differentialgleichung erfüllt. Die gewöhnliche Punktmatrix der Ebene fällt hierunter, wenn man die Punkte als Geradenbüschel auffaßt. Besonders zweckmäßig erweist es sich, die Kurvenschar in der Form $p = p(x; \xi, \eta)$ anzusetzen, worin (p, α) die Normalkoordinaten der Geraden sind. Nimmt man an, zwei Kurven der Schar berühren sich in dem betreffenden Gebiet nicht, so kann man die Kurven auch den Linienelementen zuordnen, und die Schar etwa in der Gestalt $\varrho = \varrho(p, \alpha, l)$ schreiben, wo ϱ der Krümmungsradius der durch das Element berührten Kurve und p, α, l Elementkoordinaten sind (l legt den Punkt auf der Geraden fest). Die Tangentialmetrik induziert dann eine solche im dreidimensionalen Gebiet der Elemente. Die Bedingungen dafür, daß die Gesamtheit der Linienelemente einer Geraden geodätische dieser Metrik sind, lautet $\partial^2 \varrho / \partial l^2 = 0$ im euklidischen Fall und $\partial^2 \varrho / \partial l^2 \pm \varrho / k^2 = 0$ in den beiden NE -Fällen, während die Metrik selber durch $d\sigma = (p - \varrho) d\alpha + dl$ im euklidischen Fall zu beschreiben ist. Weiterhin wird eine dreiparametrische Kurvenschar, die man durch $d\varrho/d\alpha = \omega(\alpha, p, l, \varrho)$ definieren kann, betrachtet und untersucht, wann die Tangentialmetrik darin Riemannsch ist. Als abschließende Antwort für die euklidische Ebene ergibt sich: Die notwenige und hinreichende Bedingung dafür ist die, daß die ∞^3 -Schar durch eine bestimmte Abbildung aus dem System der Kreise hervorgegangen ist. Es folgen Anwendungen auf die Integralgeometrie. Darin wird über ∞^2 -Systeme von Linienelementen integriert, die zu je zweien keine Gerade gemein haben, was im wesentlichen darauf hinausläuft, über Geradenmengen, wie auch sonst in der Integralgeometrie, zu integrieren. Der letzte Teil der Arbeit des Verf. berührt sich stark mit einer von Raševski [Polymetrische Geometrie, Trudy Sem. vektor. tensor. Analizu 5 (1941)], die aber bisher in Deutschland schwer zugänglich sein dürfte.

Werner Burau.

Ôtuki, Tominosuke: On paths in metric spaces. Math. Japon. 2, 9—22 (1949).

Die betrachteten Räume, von denen anfangs nur die Existenz einer verallgemeinerten Metrik (ohne Symmetrieaxiom) vorausgesetzt wird, werden bald zu n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten spezialisiert. In der Umgebung jedes Punktes sind Kurven (definiert durch Parameterdarstellungen) gegeben, welche die Rolle verallgemeinerter geodätischer Linien spielen; sie erfüllen gewisse Axiome, welche insbesondere die eindeutige Verbindbarkeit zweier hinreichend benachbarter Punkte durch eine geodätische Linie sicherstellen. Nachdem die Verlängerbarkeit eines geodätischen Bogens über seinen Endpunkt hinaus untersucht worden ist, gelangt man zu dem Ziel der Arbeit, nämlich zu dem folgenden — für Riemannsche und auch allgemeinere Räume bekannten — Satz: Aus jeder Folge geodätischer Bögen C_n , deren Endpunkte a_n, b_n gegen Punkte a, b konvergieren, läßt sich eine Teilfolge auswählen, die in dem Sinne konvergent ist, daß das Grenzgebilde entweder ein geodätischer Bogen ist, der a mit b verbindet, oder eine von a ausgehende geodätische Linie, welche divergiert. [Ein analoger Satz ist für allgemeine metrische Räume bewiesen worden von S. Cohn-Vossen, Composito Math. 3, 441—452 (1936); dies. Zbl. 15, 123.]

Heinz Hopf.

Ôtsuki, Tominosuke: On a space with affine connection which has no closed path. Tôhoku math. J., II. Ser. 1, 88—90 (1949).

Es wird auf einer differenzierbaren Fläche vom topologischen Typus des Torus eine reguläre Differentialgleichung 2. Ordnung angegeben, welche keine geschlossene Lösungskurve besitzt. [Die Bemerkung auf der ersten Seite der Arbeit, daß eine geschlossene Fläche, welche eine gewisse Eigenschaft besitzt, vom Typus des Torus sein muß, ist (für den Ref.) unverständlich; sie spielt übrigens nachher keine Rolle.]

Heinz Hopf.

Rozenfel'd, B. A. und A. A. Abramov: Räume affinen Zusammenhangs und symmetrische Räume. Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 2 (36), 72—147 (1950) [Russisch].

L'Article contient une exposition systématique des espaces à connexion affine avec application aux espaces symétriques et en particulier aux espaces des groupes de Lie. — On commence (§ 1) par une exposition des résultats concernant les espaces vectoriels, leurs groupes et leurs sousgroupes. Une attention spéciale est donnée aux symétries d'une espace A_n . Si x, y, z sont trois points d'une droite et t_1, t_2, t_3 sont les valeurs du paramètre affin correspondant, le rapport $(t_1 - t_2)/(t_2 - t_3)$ est un invariant aux transformations affines du paramètre t . Si cet invariant est l'unité le point y est le milieu des points x et z . Donc si deux points x^i et x'^i sont symé-

triques par rapport à un certain point a^i , nous avons (1) $x'^i = 2 a^i - x^i$. Ces transformations conservent donc un seul point, le point a^i et sont involutives (leur carré est l'unité). Quant aux produits de (1) et de la symétrie $x''^i = 2 b^i - x^i$ il est une translation $x''^i = x^i + 2 (b^i - a^i)$, donc les translations de A_n peuvent être considérées comme des produits des (1). — En passant à la géométrie différentielle on suppose que l'espace M_n en considération est une variété topologique différentielle définie à l'aide d'une base numérable de voisinages, chaque voisinage V possédant un système de coordonnées x^i , le passage de x^i à un autre système de coordonnées x'^i de V' , dans la région commune de V et V' s'obtenant par une transformation continue et dérivable. En considérant les espaces tangents, c'est-à-dire l'espace vectoriel $L(x^i)$ associé à un point x de M_n dont les coordonnées sont dx^i/dt , on dit que deux expressions A, B sont égales d'ordre $h + 1$ si nous avons $A = B + O[(dx^i)^{h+1}]$. Ainsi les vecteurs infinitésimaux $X' dt = dx^i$ sont égaux d'ordre deux aux points voisins x' à x car nous avons $x'^i = x^i + dx^i + O(dx^i)^2$. On montre aussi que si l'espace M_n possède une connexion affine Γ_{jk}^i , cette connexion peut être considérée comme la limite du rapport $\delta dx^i / \delta x^j dx^k$ où δdx^i est convenablement défini. En considérant les courbes auto-parallèles ou géodésiques de l'espace A_n $d^2 x^i / dt^2 + \Gamma_{jk}^i (dx^j / dt)(dx^k / dt) = 0$ le paramètre t est défini abstraction faite d'une transformation affine, donc on peut sur chaque courbe auto-parallèle définir des symétries à l'aide de ce paramètre. Dans le cas où M_n est un espace de Riemann V_n , t peut être pris comme l'arc sur la géodésique qui est en ce cas, en même temps ligne de la plus courte distance et la symétrie est une réflexion. — En ce qui concerne les groupes de Lie (§ 2) on considère les divers connexions affines qu'on peut leur associer, en particulier la connexion sans torsion. Le tenseur de courbure de cette connexion est donnée par la formule $R_{kj, h}^{\dots i} = \frac{1}{4} c_{kj}^l c_{lh}^i$ où c_{kj}^h sont les constantes de structure du groupe. Comme $R_{j\bar{h}}$ obtenu par contraction $i = k$ est symétrique, la contraction $i = h$ est nulle, donc l'espace est equiaffin. — Pour les espaces symétriques (§ 3) on part de la propriété qu'à chaque point de l'espace est associée une transformation involutive, qui laisse invariante la connexion et qui coïncide avec les symétries dans les espaces linéaires tangents. L'espace est dit homogène si le groupe de ces symétries, qu'on appelle groupe fondamental de l'espace est transitif. Si ce groupe n'est pas le groupe de transformation en lui même de l'espace, il est un diviseur normal de ce groupe. Un espace symétrique à connexion sans torsion est un espace d'un groupe de Lie si son groupe fondamental possède un groupe simplement transitif et inversement. Au point de vue local un espace symétrique possède la propriété que le tenseur dérivé du tenseur de courbure est nul, ou la propriété qu'il possède une représentation locale sur une surface complète d'un groupe de Lie. — Dans le § 4 on considère les espaces symétriques à groupe fondamental simple, leur classification et leurs modèles. — Une large bibliographie termine l'article; en particulier y sont cités les travaux de E. Cartan, fondateur de la théorie des espaces symétriques.

G. Vranceanu.

Yano, Kentaro: Union curves and subpaths. Math. Japon. 1, 51—59 (1948).

Im Riemannschen Raum V_n sei in den Punkten einer Hyperfläche V_{n-1} ein Vektorfeld L^λ definiert. Diejenigen Kurven der V_{n-1} , deren Schmieg Ebene in bezug auf den V_n in jedem ihrer Punkte stets die dort vorgeschriebene L^λ enthalten, werden als „union curves“ bezeichnet. Verf. gibt das Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung an, welches diese Kurven bestimmt. Längs einer beliebigen Kurve bestimmen diese Differentialausdrücke einen kontravarianten Vektor, den „union Krümmungsvektor“ der Kurve, der offensichtlich eine Verallgemeinerung des Krümmungsvektors ist. Bekanntlich kann man die durch die Übertragung vom V_n im V_{n-1} induzierte Übertragung dadurch erhalten, daß man das für den V_n gebildete invariante Differential eines Vektors des V_{n-1} in einem bestimmten Punkt, orthogonal auf die Tangentialhyperebene dieses Punktes des V_{n-1} projiziert. Verf. projiziert nun das invariante Differential in Richtung L^λ und erhält so eine Übertragung, die er als induzierte Übertragung bezüglich der Richtung L^λ bezeichnet. Es wird nun nachgewiesen, daß die Bahnen (paths) in bezug auf

diese Übertragung die „union-Kurven“ geben. Verf. definiert diese Kurvenklasse auch für einen affin zusammenhängenden Raum A_n . Zunächst speziell so, daß er die Richtung L^λ zur Affinnormalen B^λ der Hyperfläche A_{n-1} macht. Die „union-Kurven“ sind die Bahnen in bezug auf die auf der Hyperfläche induzierte Übertragung. Eine Verallgemeinerung erhält Verf. dadurch, daß er die L^λ von der Affinnormalen verschieden wählt, doch so, daß L^λ den A_{n-1} berührt. Es wird nun gefordert, daß die Schmiegebenen in bezug auf den A_n stets die durch L^λ , B^λ bestimmte Ebene schneiden. Diese Kurven des A_{n-1} bezeichnet Verf. als „subpaths“. Verf. definiert nun auch „subpaths“ im A_n selbst dadurch, daß die Schmiegeebene einer solchen Kurve in jedem ihrer Punkte stets den Vektor eines im A_n erklärten Feldes enthalten soll. Verf. definiert als subprojektive Übertragung diejenigen Abänderungen der Übertragungsparameter der affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeit, die die „subpaths“ in sich überführen. Die subprojektive Geometrie ist dann der Inbegriff derjenigen Eigenschaften und Beziehungen, die bei subprojektiven Änderungen invariant bleiben.

Otto Varga.

● Schrödinger, Erwin: *Space-time structure*. Cambridge: At the University Press 1950. 120 p. 10 s. 6 d. net.

Debever, R.: *Électromagnétisme et géométrie*. (Conférence faite le 19 juin 1948.) Bull. Soc. math. Belgique 1947—1948, 34—42 (1948).

Unter einem elektromagnetischen Raum versteht Verf. eine vierdimensionale differentialgeometrische Mannigfaltigkeit, deren Struktur durch ein Tensorfeld η_{ijkl} mit folgenden Eigenschaften beschrieben wird: η_{ijkl} ist eine vierfach kovariante Tensordichte vom Gewicht -1 und genügt den Symmetriebedingungen $\eta_{ijkl} = -\eta_{jikl} = -\eta_{ijlk}$, $\eta_{ijkl} = \eta_{klij}$. Diese Begriffsbildung erklärt sich daher, daß die Materialgleichungen des elektromagnetischen Feldes in der vierdimensionalen Schreibweise die Gestalt $F_{ij} = \frac{1}{2} \eta_{ijkl} H^{kl}$ haben, worin η_{ijkl} eine Tensordichte von den angegebenen Eigenschaften ist. Verf. berechnet zwei Spezialfälle: 1. Es existiert eine Tensordichte η_{ik} , so daß $\eta_{ijkl} = \eta_{ik} \eta_{jl} - \eta_{il} \eta_{jk}$ gilt, 2. die Form $\eta_{ijkl} X^i X^k$ läßt sich durch Koordinatentransformationen auf die Gestalt $(X^{14})^2 + (X^{24})^2 + (X^{34})^2 - \lambda_3^2 (X^{12})^2 - \lambda_1^2 (X^{23})^2 - \lambda_2^2 (X^{31})^2$ bringen. Im ersten Fall, der z. B. beim elektromagnetischen Feld im leeren Raum vorliegt, läßt sich nach E. Cartan ein konformer Zusammenhang einführen. Im zweiten Fall, der dem elektromagnetischen Feld in Kristallen entspricht, werden Isomorphiebedingungen angegeben.

Willi Rinow.

Topologie:

● Kuratowski, Casimir: *Topologie I. Espaces métrisables, espaces complets*. 2^e éd. revue et augmentée. (Monographie matematyczne. T. XX.) Warszawa: Seminarium Matematyczne Uniwersytetu 1948. XI, 450 p. \$ 7,50.

Da die vorliegende 2. Auflage der Topologie I eine revidierte und erweiterte Neuauflage ist, kann auf die Besprechung der 1. Auflage (dies. Zbl. 8, 133) verwiesen werden. Die Erweiterungen betreffen einerseits die Abrundung der behandelten Theorien, andererseits dienen sie Vorbereitungen zum II. Band.

Georg Nöbeling.

● Kuratowski, Casimir: *Topologie II. Espaces compacts, espaces connexes, plan euclidien*. (Monographie matematyczne. T. XXI.) Warszawa: Seminarium Matematyczne Uniwersytetu 1950. VIII, 444 p. \$ 6,—.

Der II. Band ist spezielleren Räumen gewidmet als der I. Band: den kompakten (4. Kap.), den zusammenhängenden (5. Kap.), den lokal zusammenhängenden (6. Kap.), den zusammenziehbaren Räumen (7. Kap.) und der Euklidischen Ebene (9. Kap.). Im 4. Kap. werden insbesondere die halbstetigen Zerlegungen und die Dimension kompakter Räume behandelt. Im 5. Kap. wird u. a. die Theorie der irreduziblen und der unzerlegbaren Kontinuen entwickelt, was um so erfreulicher ist, als diese Theorien meines Wissens noch nirgends in dieser Ausführlichkeit dargestellt ist; erfreulich auch deshalb, weil diese Kontinuen keineswegs pathologische Ausnahmefälle, sondern den Regelfall darstellen. Das 6. Kap. umfaßt insbesondere die Theorie der Kurven und der zyklischen Elemente. Das 9. Kap. ist auch über den Kreis der Topologen hinaus von Bedeutung. Hier werden u. a. der Jordansche Kurvensatz und der Antoinessche Erweiterungssatz äußerst kurz und elegant bewiesen und zwar ohne Approximation durch Polygone. Die Elimination der Polygonapproximation, die durch S. Eilenberg in seiner These (dies. Zbl. 13, 420) systematisch durchgeführt wurde und zur Entdeckung neuer Sätze führte, ist ein wichtiges

Beispiel für die Durchschlagskraft mengentheoretischer Methoden. Durch diese rein mengentheoretische Behandlung wird u. a. der topologische Charakter zahlreicher Sätze der Theorie der analytischen Funktionen enthüllt. So lassen sich z. B. der Satz von Weierstraß über die Zerlegbarkeit ganzer Funktionen in Primfaktoren und der Satz von Rouché über die algebraische Anzahl der Nullstellen holomorpher Funktionen für stetige Funktionen beweisen, die nirgends verschwinden und gewissen Voraussetzungen nichtanalytischer Natur genügen. — Zusammenfassend kann gesagt werden, das das vorliegende zweibändige Werk nach Form und Inhalt ein bereitetes Zeugnis ablegt für die polnische mengentheoretische Schule.

Georg Nöbeling.

Matsushita, Shin-ichi: The algebra of topological operations. I. Math. Japon. 1, 28—35 (1948).

The subject of this paper is the study of a Boolean algebra \mathfrak{B} with an operation $X^d \in \mathfrak{B}$ defined for all $X \in \mathfrak{B}$ and such that (1) $(X + Y)^d = X^d + Y^d$; 2) $X^{dd} \subseteq X^d$; 3) $0^d = 0$. — X^d is called the derivation of X . Clearly \mathfrak{B} is the closure algebra in the sense defined by McKinsey and Tarski [Ann. of Math. 45, II. Ser. 141—191 (1944)] with the closure operation $X^a = X + X^d$. By means of the operation X^d we can define other fundamental topological operations, e. g. the derivative $X^{(\alpha)}$ of the order α , the α -coherence $X^{(\alpha)}$, Kuratowski's operation $D(X)$ [see Topologie I, Warszawa 1948, p. 51] denoted here by X^δ , etc. The complement of an element $X \in \mathfrak{B}$ is denoted by X^c . The author proves some relations between elements X^q and X^σ where q and σ are finite sequences formed from the signs $c, d, a, \delta, (\alpha), \langle \alpha \rangle$, etc. For instance, it is proved the equation $X^{dcd} = X^{dcdcdcd}$ analogous to an equation of Kuratowski for the closure operation a (loc. cit., p. 42). — The relation $X^{(\alpha)c} \subseteq X^{c(\alpha)}(E^d)$ in Lemma 1 is not true (a counter example: \mathfrak{B} is the Boolean algebra of all subsets of the space S composed of the interval $0 \leq x \leq 1$ and of the number 2; $\alpha = 1$ and X = the set of all numbers n^{-1} , $n = 1, 2, \dots$). Consequently the proof of Theorem 1 is not correct. In § 8, the class P should be supposed to form an ideal (not a subalgebra). It is not stated, under what conditions about P the element X^* always exists and has the properties $*_1) - *_3)$ (the definition of X^* is not the natural generalization of that of Kuratowski, loc. cit. p. 35; see also reviewer's paper „Closure algebras“, p. 178; this. Zbl. 40, 252). It is not explicitly stated where the Boolean algebra \mathfrak{B} is assumed to be complete.

Roman Sikorski.

Matsushita, Shin-ichi: L'algèbre des opérations topologiques. II. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part. I 1, 77—80 (1949).

In einer Booleschen Algebra untersucht Verf. die Operation d der „Derivierten“-Bildung, für die er folgende Axiome aufstellt: $(X + Y)^d = X^d + Y^d$, $0^d = 0$, $X^{dd} \subseteq X^d$. Das Hauptziel der Arbeit ist die Herleitung einer notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, daß ein Element nicht-dicht ist. *Georg Nöbeling.*

Matsuyama, Noboru: A note on general topological spaces. Tôhoku math. J., II. Ser. 1, 22—25 (1949).

Remarques élémentaires sur les relations entre la notion de convergence suivant un filtre dans un „espace topologique général“ (c'est-à-dire où les „voisinages“ d'un point x sont seulement assujettis à contenir x et à former une base de filtre), et la notion d'adhérence, ainsi que diverses notions analogues à cette dernière, introduites par l'A.

Jean Dieudonné.

Morita, Kiiti: Star-finite coverings and the star-finite property. Math. Japon. 1, 60—68 (1948).

Verf. beweist: Ein regulärer Raum, der die „Stern-Endlichkeits-Eigenschaft“ (S. E.) besitzt, ist „voll-normal“; ein regulärer Raum mit abzählbarer Basis besitzt die S. E.; die Umkehrung gilt, wenn der reguläre Raum auch zusammenhängend ist; ein lokal-bikompakter Raum ist „voll-normal“ dann und nur dann, wenn er die S. E. besitzt. Die Begriffe der S. E. und der „Voll-Normalität“ stammen von J. W. Tukey (Convergence and uniformity in topology, Princeton 1940; dies. Zbl. 25, 91). Ref. bemerkt, daß eine stärkere Fassung der ersten der obigen Behauptungen von A. H. Stone bewiesen wurde (dies. Zbl. 32, 314). *Tudor Ganea.*

Sikorski, Roman: Remarks on some topological spaces of high power. Fundamenta Math. 37, 125—136 (1950).

Es werden topologische Räume („ ω_μ -Räume“) untersucht, die die folgenden drei Axiome erfüllen: I $_\mu$. Für jede α -Folge $\{X_\xi\}$, $\alpha < \omega_\mu$ (ω_μ reguläre Anfangszahl), von Mengen X_ξ gilt

$\sum_{\xi < \alpha} X_\xi = \sum_{\xi < \alpha} X_\xi$. II. $X = X$ für jede endliche Menge X . III. $X = \bar{X}$. (I_0, II, III ist das Axiomensystem von Kuratowski.) Zur sinnvollen Verallgemeinerung der Sätze des Falles $\mu = 0$ sind in den üblichen Definitionen die Ausdrücke „abzählbare Folge“, „endliche Menge“, „abzählbare Menge“ zu ersetzen durch „ ω_μ -Folge“, „Menge einer Mächtigkeit $< \aleph_\mu$ “, „Menge der Mächtigkeit \aleph_μ “. Der Definition der metrischen ω_μ -Räume wird eine geordnete Gruppe zugrunde gelegt, in der es eine monoton abnehmende ω_μ -Folge $\{e_\xi\}$ positiver Elemente gibt mit folgender Eigenschaft: Zu jedem positiven Element e der Gruppe gibt es ein $\xi_0 < \omega_\mu$, so daß $e_\xi < e$ für $\xi_0 < \xi < \omega_\mu$. Bei diesen Übertragungen gelten der Cantorsche Durchschnittssatz, der Urysohn'sche Metrisationssatz usw. Dagegen gilt z. B. nicht für jedes μ , daß ein vollständiger und total beschränkter ω_μ -Raum kompakt ist. Für $\mu > 0$ sind alle ω_μ -Räume nulldimensional, woraus wohl erklärbar ist, daß die neu auftretenden Probleme verhältnismäßig leicht auch in der üblichen Sprache der Mengenlehre gestellt werden können. *E. Specker.*

Nagata, Jun-iti: On a necessary and sufficient condition of metrizability. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 1, 93—100 (1950).

L'A. donne un nouveau et intéressant critère de métrisabilité d'un espace topologique qui se rattache au th. de A. H. Stone sur les espaces paracompacts (ce Zbl. 32, 314). Pour que E soit métrisable, il faut et il suffit que E soit régulier et qu'il existe une base U de la topologie de E qui soit réunion d'une famille dénombrable de recouvrements U_n localement finis. Une condition équivalente est la suivante: E doit être régulier, et il doit exister une famille de fonctions continues f_α , prenant leurs valeurs dans l'intervalle $0 \leq t \leq 1$, de somme continue et finie, et telle que pour tout point $a \in E$ et tout voisinage V de a dans E , il existe une fonction f_α nulle dans le complémentaire de V , et > 0 au point a . A l'aide de ce critère, l'A. démontre entre autres le résultat suivant, qui ne semble guère accessible par des méthodes plus directes: si un espace E , où tout point est fermé, est réunion d'une famille (S_α) de sous-espaces fermés métrisables telle que les S_α forment un recouvrement localement fini, alors E est métrisable. *Jean Dieudonné.*

Nishimura, Toshio: Remarks on the metrization problem. Tôhoku math. J., II. Ser. 1, 225—228 (1950).

Ist in $E \times E$ eine nicht-negative reelle Funktion $\varphi(a, b)$ erklärt mit (1): $\varphi(x, y) = 0$ dann und nur dann, wenn $x = y$, (2): zu jedem $\varepsilon > 0$ und $a \in E$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$, so daß $\varphi(a, d) < \varepsilon$, sobald $\varphi(a, b) < \delta$, $\varphi(c, b) < \delta$ und $\varphi(c, d) < \delta$, so ist der allgemein-metrische Raum $(E; \varphi)$ metrisierbar. Dieses Ergebnis geht über A. H. Frink [Bull. Amer. math. Soc. 43, 133—142 (1937); dies. Zbl. 16, 82] hinaus, welcher von φ auch keine Symmetrie, aber die Dreiecksungleichung in der Form $\varphi(a, c) \leq \varphi(a, b) + \varphi(b, c)$ verlangt. *Georg Aumann.*

Császár, Ákos: An elementary proof of a theorem of H. E. Vaughan. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 20, Nr. 1, 1—3 (1948).

Der Satz von Vaughan lautet: Ein metrischer Raum E ist zu einem metrischen Raum E' , in welchem jede beschränkte Menge kompakt ist, dann und nur dann homöomorph, wenn E lokal kompakt und separabel ist. *Georg Nöbeling.*

Bertolini, Fernando: Osservazioni sulle nozione di connessione. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 9, 74—78 (1950).

È noto che ogni insieme X di uno spazio topologico è connesso allora e allora soltanto che, per ogni coppia di punti A, B di X esiste un insieme connesso contenuto in X che li contiene. Quando lo spazio è euclideo e X è aperto, esiste un continuo compatto di X che contiene A e B . Il Picone è stato portato a distinguere due classi di insieme connessi, la classe degli insiemi X connessi continuamente e quella degli insieme X connessi propriamente. Nel primo caso si esige che l'insieme connesso che contiene A, B sia un continuo e nel secondo caso che sia un continuo compatto. L'A. dà l'esempio di un insieme connesso che non lo è propriamente e l'esempio di un insieme connesso che non lo è continuamente. Il primo esempio prova anche che se lo spazio è quello euclideo, l'ipotesi che X sia aperto è essenziale perchè

esista un continuo kompakt zu cui appartengono A e B . Un altro esempio che l'A. dà fa vedere che, in generale, se lo spazio non è euclideo, non è detto che esista sempre un continuo kompakt che contenga i due punti A e B di X . Vale però la proposizione: Se, dati ad arbitrio un punto x , ed un suo intorno I , è contenuto in I un intorno I' di x che sia propriamente connesso, allora ogni insieme aperto connesso è propriamente tale.

Landolino Giuliano.

Keesee, John W.: Finitely-valued cohomology groups. Proc. Amer. math. Soc. **1**, 418—422 (1950).

Es werden endlichwertige relative Cohomologiegruppen $H^m(X, A)$ definiert, indem von den Funktionen, die in der Definition der Alexanderschen Cohomologiegruppen $H^m(X, A)$ auftreten (vgl. Spanier, dies. Zbl. **35**, 248), zusätzlich gefordert wird, daß sie nur endlich viele Werte annehmen. Der natürliche Homomorphismus von $H^m(X, A)$ in $H^m(X, A)$ ist ein Isomorphismus auf, falls X ein kompakter Hausdorffscher Raum und A eine abgeschlossene Teilmenge ist.

E. Specker.

Hu, Sze-Tsen: A cohomology theory with higher coboundary operators. I. Construction of the groups. II. Verification of the axioms of Eilenberg-Steenrod. Nederl. Akad. Wet., Proc. **52**, 1144—1150 (1949), **53**, 70—76 (1950); Indagationes math. **11**, 418—424 (1949), **12**, 1—7 (1950).

Die Alexandersche Cohomologietheorie in der Darstellung von Spanier (dies. Zbl. **35**, 248) wird folgendermaßen verallgemeinert: $\Phi^m(X, G)$ sei die Gruppe der Abbildungen des $(m+1)$ -fachen Kartesischen Produktes X^{m+1} eines topologischen Raumes X in die abelsche Gruppe G , $\Phi_0^m(X, G)$ die Untergruppe derjenigen Abbildungen, die auf einer offenen Umgebung der Diagonale von X^{m+1} verschwinden, $C^m(X, G) = \Phi^m(X, G)/\Phi_0^m(X, G)$ für $m \geq 0$, = Nullgruppe andernfalls. Es wird für $p \geq 1$ ein Homomorphismus δ^p von $\Phi^m(X, G)$ in $\Phi^{m+p}(X, G)$ definiert, der $\Phi_0^m(X, G)$ in $\Phi_0^{m+p}(X, G)$ abbildet und somit einen Homomorphismus von $C^m(X, G)$ in $C^{m+p}(X, G)$ induziert. Für $\varphi \in \Phi^m(X, G)$ ist $\delta^p \delta^q \varphi = \theta(p, q) \delta^{p+q} \varphi$; dabei ist $\theta(p, q) = 0$, wenn p, q ungerade, andernfalls $\theta(p, q) = ([p/2]! + [q/2]!)/[p/2]! [q/2]!$. Ist $\theta(p, q)g = 0$ für jedes $g \in G$, so wird die Cohomologiegruppe $H_{p,q}^m(X, G)$ folgendermaßen definiert: $Z^{m,p}$ sei der Kern des Homomorphismus $C^m \rightarrow C^{m+p}$, $B^{m,q}$ das Bild von C^{m-q} beim Homomorphismus $C^{m-q} \rightarrow C^m$; auf Grund der Voraussetzung über G ist $B^{m,q}$ Untergruppe von $Z^{m,p}$ und die Faktorgruppe $Z^{m,p}/B^{m,q} = H_{p,q}^m$, somit definiert. Die Einführung der relativen Cohomologiegruppen $H_{p,q}^m(X \bmod X_0, G)$ bietet keine Schwierigkeiten. In einem ersten Anhang wird untersucht, wie man sich von der Voraussetzung über die Ordnung der Elemente von G befreien kann; ein zweiter Anhang betrachtet die singuläre Theorie. — In der zweiten Arbeit werden die definierten Cohomologiegruppen im Hinblick auf die Axiome von Eilenberg und Steenrod [Proc. nat. Acad. Sci. USA **31**, 117—120 (1945)] untersucht. Es wird dazu ein Homomorphismus δ^p von $H_{p,q}^m(X_0, G)$ in $H_{p,q}^{m-p}(X \bmod X_0, G)$ definiert und einer Abbildung f von X in Y , die die Teilmenge X_0 von X in die Teilmenge Y_0 von Y abbildet, ein Homomorphismus f^* von $H_{p,q}^m(Y \bmod Y_0, G)$ in $H_{p,q}^m(X \bmod X_0, G)$ zugeordnet. Damit lassen sich die Behauptungen der erwähnten Axiome übertragen; sie erweisen sich sämtlich als erfüllt mit Ausnahme des Dimensionsaxioms: Die positiv-dimensionalen Cohomologiegruppen des Raumes, der aus einem Punkt besteht, brauchen nicht nur das Nullelement zu enthalten.

E. Specker.

Cartan, Henri: Une théorie axiomatique des carrés de Steenrod. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 425—427 (1950).

Die Steenrodschen Quadrat Sq^i (dies. Zbl. **30**, 416) werden in die Cohomologietheorie graduierter Gruppen eingeführt (vgl. J. Leray, dies. Zbl. **38**, 363) und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die Quadrate der Cohomologietheorie einer graduierter Gruppe, die einem kompakten Raume zugeordnet ist, die Quadrate der Cohomologietheorie dieses Raumes sind. Mod 2 ergeben sich daraus die beiden Formeln: $Sq^i(\xi \times \eta) = \sum_{j+k=i} Sq^j(\xi) \times Sq^k(\eta)$ (Cohomologie eines Produktraumes), $Sq^i(\xi \cup \eta) = \sum_{j+k=i} Sq^j(\xi) \cup Sq^k(\eta)$ (\cup : Cup-Produkt).

E. Specker.

Thom, René: Classes caractéristiques et \bar{i} -carrés. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 427—429 (1950).

Es sei E ein Sphärenbündel mit Faser S^{k-1} und Basis K (endlicher zusammenhängender Komplex). E ist in natürlicher Weise ein Bündel $A(A')$ mit abgeschlossenen (offenen) Vollkugeln als Fasern und Basis K zugeordnet. Die Projektion $A \rightarrow K$ induziert einen Homomorphismus $j: H^r(K) \rightarrow H^r(A)$, der ein Isomorphismus auf ist. Die Cohomologiegruppe $H^r(A')$ (kompakte Träger) ist kanonisch isomorph $H^r(A, E)$, und es ist somit ein Homomorphismus β definiert, der $H^r(A')$ in $H^r(A)$ abbildet. Ferner ist in natürlicher Weise ein Isomorphismus $\varphi^*: H^{r-k}(K) \rightarrow H^r(A')$ definiert [bei nicht orientierbarem E ist dabei für $H^r(A')$ eine lokale Koeffizientengruppe zu verwenden]. Ist nun $U_k \in H^k(A')$ das φ^* -Bild des erzeugenden Elementes von $H^0(K)$, so ist $j^{-1}\beta U_k \in H^k(K)$ das erste Hindernis W_k von E . Diese Beziehung läßt sich auch in der Form schreiben $\varphi^* W_k = U_k \cup K_k$. Allgemein gilt für die Stiefel-Whitneyschen Klassen W_r ($r = 0, \dots, k$) die Formel $(*) \varphi^* W_r = \text{Sq}^r U_k$ (Sq^r : Steenrodsches Quadrat). Der Homomorphismus β bildet zusammen mit den Homomorphismen $\alpha: H^{r-1}(E) \rightarrow H^r(A')$, $\gamma: H^r(A) \rightarrow H^r(E)$, die in natürlicher Weise definiert sind, eine exakte Folge: $\rightarrow H^{r-1}(E) \rightarrow H^r(A') \rightarrow H^r(A) \rightarrow H^r(E) \rightarrow$. E. Specker.

Thom, René: Variétés plongées et i -carrés. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 507—508 (1950).

Fortsetzung der obigen Note. Es sei V eine geschlossene differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n , M eine p -dimensionale Teilmannigfaltigkeit von V . Das Normalenbündel E von M (Faser S^{n-p}) und die zugeordneten Bündel A, A' können als Teilmengen von V aufgefaßt werden. Dem Isomorphismus $\varphi^*: H^r(M) \rightarrow H^{r+n-p}(A')$ (Koeffizienten ganze Zahlen oder Restklassen mod 2, je nachdem E orientierbar ist oder nicht) entspricht so ein Homomorphismus $\psi^*: H^r(M) \rightarrow H^{r+n-p}(V)$, da jeder Cozyklus von A' zu einem Cozyklus von V erweitert werden kann. Die Injektion $f: M \rightarrow V$ induziert Homomorphismen $j: H_i(M) \rightarrow H_i(V)$ (Homologiegruppen), $j^*: H^i(V) \rightarrow H^i(M)$. Es ist $\psi^*(j^* z \cup y) = z \cup \psi^* y$ ($y \in H(M)$, $z \in H(V)$). Sind m, v die Grundzyklen von M, V , so ist $v \circ \psi^*(z) = f(m \circ z)$ ($z \in H^{p-i}(M)$); ψ^* ist der Umkehrhomomorphismus von Gysin. Die Formel $(*)$ der vorigen Note überträgt sich auf ψ^* : $\text{Sq}^r u_{n-p} = \psi^* W_r$; dabei ist u_{n-p} der Cozyklus, der dem Zyklus $f(m)$ entspricht, W_r die r -te charakteristische Klasse. Folgerungen: Ist f ein Isomorphismus, so ist es auch ψ^* ; die charakteristischen Klassen des Normalenbündels sind dann durch die Homologielage von M in V bestimmt. Diese Voraussetzung ist erfüllt im Falle der Diagonale des kartesischen Produkts $V \times V$; das Normalenbündel der Diagonale ist isomorph dem Tangentenbündel von V : Die charakteristischen Klassen W_i des Tangentenbündels von V sind unabhängig von der differenzierbaren Struktur von V ; ist Δ der Cozyklus von $V \times V$, der der Diagonale entspricht, so ist $\text{Sq}^i \Delta = \psi^* W_i$. E. Specker.

Hirsch, Guy: L'anneau de cohomologie d'un espace fibré et les classes caractéristiques. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 1297—1299 (1949).

Es werden die Beziehungen der Cohomologieringe eines Faserraumes zu jenen der Basis und der Faser untersucht im Falle, wo die Homologiestruktur der Faser diejenige einer Sphäre oder eines hyperkomplexen projektiven Raumes ist.

E. Specker.

Kudo, Tatsuji: Homological properties of fibre bundles. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 1, 101—104 (1950).

L'A. considère dans un espace fibré A (l'espace de base étant un complexe fini) une suite exacte pour l'homologie relative dans 3 sous-espaces de A , construits respectivement au-dessus des squelettes de l'espace de base à q, q' et q'' dimensions ($q \geq q' \geq q''$), et les 3 opérateurs correspondants α, β et γ ; α est analogue à une dérivation. Il considère en particulier des groupes $\mathfrak{B}(p-q)$, noyaux de α avec $q = q' + 1$, et $\mathfrak{B}(p-q)$, images par α avec $q'' = q' - 1$; les $\mathfrak{B}(p-q)$ deviennent $\mathfrak{B}_*(p-q)$ lorsque q'' est suffisamment petit, les $\mathfrak{B}(p-q)$ deviennent $\mathfrak{B}_*(p-q)$ lorsque q est suffisamment grand. L'injection dans le groupe d'homologie de A (pour la dimension $p+q$) des groupes d'homologie des sous-espaces de A construits sur les squelettes à q dimensions définit une série de sous-groupes de ce groupe d'homologie; les facteurs de cette série sont isomorphes aux quotients $\mathfrak{B}_*(p)/\mathfrak{B}_*(p)$. Cette construction est analogue à celle qui résulte de la théorie de Leray sous sa forme primitive [C. r. Acad. Sci., Paris 222, 419 et 223, 395 (1946)] dans le cas des espaces fibrés, et elle en met d'ailleurs en évidence la signification intuitive. L'A. retrouve notamment les principaux résultats de Gysin (ce Zbl. 26, 270) lorsque la fibre est une sphère homologique et de Samelson [Ann. of Math., II. Ser. 42, 1091—1137 (1941)] lorsque l'espace de base est une sphère homologique. (La démonstration donnée par l'A. pour ces derniers résultats exige que l'espace de base soit à la fois un complexe à n dimensions et une sphère homologique à n dimensions; on peut d'ailleurs éviter cette restriction concernant le nombre de dimensions.) — L'appendice généralise un résultat de Chern et Sun (ce Zbl. 37, 102) sur l'existence d'applications homotopes des

espaces fibrés induisant des applications homotopes données des espaces de base. — Plusieurs fautes d'impression et le manque de précision des références bibliographiques rendent parfois difficile la lecture de cet article.

Guy Hirsch.

Hodge, W. V. D.: The finite algebraic form of the theory of harmonic integrals. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 12 (Topologie algébrique, Paris 26. 2. — 2. 7. 1947), 43—54 (1949).

Eine Theorie der harmonischen Ketten [vgl. B. Eckmann, Commentarii math. Helvet. 17, 240—255 (1945)], die auf der Theorie der harmonischen Integrale von Hodge beruht. Im Gegensatz zur Theorie von Eckmann ist es hier nicht nötig, Ketten und Coketten zu identifizieren oder sich auf reelle Koeffizienten zu beschränken. Im allgemeinen ist dann aber die Gruppe der harmonischen Ketten nur einer Untergruppe der Homologiegruppe isomorph. Wie bei Eckmann wird die Theorie auf die Kirchhoffschen Regeln der Elektrizitätslehre angewendet.

H. Guggenheimer.

Whitehead, J. H. C.: On operators in relative homotopy groups. Ann. of Math., II. Ser. 49, 610—640 (1948).

Es werden in den relativen Homotopiegruppen $\pi_n(Q, P)$ Endomorphismen erklärt, die im absoluten Fall die durch die Elemente der Fundamentalgruppe induzierten Automorphismen sind. Es sei $p \in P \subset Q$, die Räume P und Q seien bogenverknüpft und hinreichend regulär. Die Topologie in Q^P (Gesamtheit der Abbildungen $P \rightarrow Q$) sei so gewählt, daß eine Funktion $I \rightarrow Q^P$ (I Einheitsintervall) genau dann stetig ist, wenn die entsprechende Funktion $P \times I \rightarrow Q$ stetig ist. A sei die Komponente von Q^P , die die identische Abbildung $P \rightarrow P$ enthält, B die Teilmenge derjenigen Abbildungen von A , die P in P und p in p abbilden. Die Gesamtheit γ der Abbildungen $\xi: I \rightarrow A$ mit $\xi(0), \xi(1) \in B$ zerfällt in Klassen in γ homotoper Elemente: $\gamma_1(A, B)$ sei die Menge dieser Klassen. Den Elementen $x \in \gamma_1(A, B)$ werden nun in natürlicher Weise Endomorphismen T_x von $\pi_n(Q, P)$ zugeordnet. Definition einer Teilmenge H_e von $\gamma_1(A, B)$: $x \in H_e$, wenn für $\xi \in x$ die Abbildung $\xi(0)$ ein Homotopieinverses in B besitzt und $\xi(1)$ der identischen Abbildung $P \rightarrow P$ in B homotop ist. Für die Elemente von H_e kann in natürlicher Weise ein Produkt erklärt werden; H_e wird dadurch zu einer Gruppe. Der $x \in H_e$ entsprechende Endomorphismus T_x ist ein Automorphismus T_x ; die Zuordnung $x \rightarrow T_x$ ist ein Homomorphismus von H_e in die Gruppe der Automorphismen von $\pi_n(Q, P)$. Spezialfall: P sei die Vereinigung von endlich vielen $(n-1)$ -Sphären, die genau einen Punkt p gemeinsam haben ($n > 2$); es sei $\pi_1(Q) = 0$, und der natürliche Homomorphismus $\pi_2(P) \rightarrow \pi_2(Q)$ sei eine Abbildung auf. Die durch die Elemente von H_e induzierten Automorphismen lassen sich hier folgendermaßen beschreiben: Es sei F die Gesamtheit der Homomorphismen $f: \pi_{n-1}(P) \rightarrow \pi_n(Q, P)$ mit der Eigenschaft, daß der Endomorphismus $\Sigma_f = f \partial + 1$ von $\pi_n(Q, P)$ (wobei $\partial: \pi_n(Q, P) \rightarrow \pi_{n-1}(P)$ Randbildung, 1 Identität) ein Automorphismus ist; mit der Produktdefinition $f \cdot g = f \partial g + f + g$ wird F zu einer Gruppe. Satz: Es gibt einen Isomorphismus h von F auf H_e , so daß $T_{h(f)} = \Sigma_f$. Im Falle, daß P die Vereinigung von Kreisen ist, gilt ein entsprechender Satz; doch geht dann neben $\pi_1(P), \pi_2(Q, P), \partial: \pi_2(Q, P) \rightarrow \pi_1(P)$ auch noch die Art, wie $\pi_1(P)$ als Operatorgruppe auf $\pi_2(Q, P)$ wirkt [J. H. C. Whitehead, Proc. London math. Soc. 48, 243—291 (1944)], in die Definition von F ein. Endlich wird noch der Fall betrachtet, daß $P = S^{n-1}$ homotop 0 in Q ist.

E. Specker.

Whitehead, J. H. C.: The homotopy type of a special kind of polyhedron. Ann. Soc. Polonaise Math. 21, 176—186 (1949).

Ein System H von abelschen Gruppen $H^n, H^{n+1}, H^{n+2}, H^n(2)$ mit endlich vielen Erzeugenden und von Homomorphismen μ, Δ, γ^* ist ein A_2^n -System, wenn (1) H^n frei ist, (2) die Elemente von $H^n(2)$ die Ordnung zwei haben, (3) H_2^n (die mod 2 reduzierte Gruppe H^n) Untergruppe von $H^n(2)$ ist, (4) μ der Homomorphismus von H^n in $H^n(2)$ ist, der H^n in der natürlichen Weise auf $H_2^n \subset H^n(2)$ abbildet, (5) Δ ein Homomorphismus von $H^n(2)$ in H^{n+1} ist, dessen Kern H_2^n und dessen Bild ${}_2H^{n+1}$ (die Untergruppe der Elemente der Ordnung 2 von H^{n+1}) ist, (6) γ^* ein Homomorphismus von $H^n(2)$ in H_2^{n+2} (H^{n+2} reduziert mod 2) ist. Ein System f von Homomorphismen der entsprechenden Gruppen zweier A_2^n -Systeme H, H ist ein Homomorphismus, wenn die Homomorphismen von f und der Homomorphismus $\varphi: H_2^{n+2} \rightarrow H_2^{n+2}$, der durch $f_3 \in f: H^{n+2} \rightarrow H^{n+2}$ und die natürlichen Homomorphismen $H^{n+2} \rightarrow H_2^{n+2}, H^{n+2} \rightarrow H_2^{n+2}$ induziert wird, mit μ, Δ, γ^* vertauschbar sind; sind die Homomorphismen von f Isomorphismen, so ist f selbst ein Isomorphismus. Es sei nun K ein endliches zusammenhängendes Polyeder einer Dimension $\leq n+2$, dessen Homotopiegruppen der Dimensionen $1 \leq k \leq n-1$ ($2 \leq n$) verschwinden („ A_2^n -Polyeder“). K wird folgendermaßen ein A_2^n -System $H(K)$ zugeordnet: H^m ($m = n, n+1, n+2$) ist die ganzzahlige m -te Cohomologiegruppe von K , $H^n(2)$ ist die n -te Cohomologiegruppe von K

mit Koeffizienten mod 2. Die Gruppe H_2^n kann in natürlicher Weise mit einer Untergruppe von $H^n(2)$ identifiziert werden. μ ist der natürliche Homomorphismus von H^n in $H^n(2)$, Δ der Homomorphismus $\frac{1}{2}\delta$ von $H^n(2)$ in H^{n+1} , γ^* das Steenrodsche $(n-2)$ -Quadrat, das $H^n(2)$ homomorph in $H^{n+2}(2) = H_2^{n+2}$ abbildet. Der Abbildung f eines A_2^n -Polyeders K in ein A_2^n -Polyeder L ist ein Homomorphismus f^* von $H(K)$ in $H(L)$ zugeordnet; f ist eine geometrische Realisierung von f^* . Für $n \geq 3$ gelten die folgenden Sätze: (I) Jedes A_2^n -System ist isomorph dem System $H(K)$ eines A_2^n -Polyeders K . (II) Zwei A_2^n -Polyeder haben genau dann denselben Homotopietypus, wenn die ihnen zugeordneten Systeme isomorph sind. (III) Jeder-Homomorphismus der A_2^n -Systeme zweier A_2^n -Polyeder läßt sich geometrisch realisieren. (IV) Der Homotopietypus zweier A_2^n -Polyeder, deren $(n+1)$ -te Homotopiegruppen verschwinden, ist bestimmt durch die Bettischen Zahlen und die Torsionskoeffizienten. Der Beweis ist analog jenem der Arbeit des Verf., in der der Fall $n = 2$ behandelt wurde (dies. Zbl. 36, 127); doch ergeben sich hier Vereinfachungen.

E. Specker.

Chang, Su-Cheng: Homotopy invariants and continuous mappings. Proc. Roy. Soc., London, Ser. A. 202, 253—263 (1950).

Es werden die A_2^n -Systeme, $n > 2$, von J. H. C. Whitehead (vgl. obige Besprechung, deren Bezeichnungen beibehalten werden) in bezug auf Isomorphie klassifiziert. Notwendig für Isomorphie zweier Systeme ist die Isomorphie der entsprechenden Gruppen [dabei folgt die Isomorphie der Gruppen $H^n(2)$, $\bar{H}^n(2)$ schon aus jener der übrigen]; sind entsprechende Gruppen isomorph, so gibt es auch Isomorphismen, die mit μ , Δ vertauschbar sind. Es genügt daher, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß zwei Systeme, die sich nur in den Homomorphismen γ^* , γ^* unterscheiden, isomorph sind. Das ist genau dann der Fall, wenn es Automorphismen $a: H^n(2) \rightarrow H^n(2)$, $b: H_2^{n+2} \rightarrow H_2^{n+2}$ gibt mit folgenden Eigenschaften: (1) Es gibt Automorphismen $a_1: H^n \rightarrow H^n$, $a_2: H^{n+1} \rightarrow H^{n+1}$ mit $\mu a_1 = a \mu$, $\Delta a = a_2 \Delta$. (2) Es gibt einen Automorphismus $b_1: H^{n+2} \rightarrow H^{n+2}$ mit $\nu b_1 = b$ ($\nu: H^{n+2} \rightarrow H_2^{n+2}$ natürlicher Homomorphismus), (3) $b^{-1} \gamma^* a = \gamma^*$. Werden die Gruppen H^n , H^{n+1} , H^{n+2} als direkte Summen zyklischer Gruppen dargestellt, so können die Automorphismen a , b , die (1), (2) erfüllen, leicht charakterisiert werden; auf Grund der Ränge von Teilmatrizen der Matrix, die γ^* nach Wahl von Basen in $H^n(2)$ und H_2^{n+2} darstellt, wird sodann einem A_2^n -System ein berechenbares endliches System von ganzen Zahlen zugeordnet (Torsionskoeffizienten zweiter Stufe), das das A_2^n -System zusammen mit den Gruppen charakterisiert. In einem zweiten geometrischen Teil werden elementare A_2^n -Polyeder definiert und ihre Systeme berechnet; da durch Zusammenheften von elementaren Polyedern in einem Punkt ein Polyeder mit beliebigem A_2^n -System erhalten werden kann, ist jedes A_2^n -Polyeder von gleichem Homotopietypus wie eines dieser zusammengehefteten Polyeder. Endlich wird angegeben, wie sich die $(n+1)$ -ten Homotopie- und Cohomotopiegruppen eines A_2^n -Polyeders auf Grund der Cohomologiegruppen und Torsionskoeffizienten zweiter Stufe berechnen.

E. Specker.

Hu, Sze-Tsen: Structure of the homotopy groups of mapping spaces. Amer. J. Math. 71, 574—586 (1949).

Es sei Y ein bogenweise zusammenhängender topologischer Raum, y_0 ein Punkt von Y , X ein zusammenhängender endlicher simplizialer geometrischer Komplex, X_0 ein abgeschlossener Teilkomplex von X , der nicht zusammenhängend zu sein braucht und auch leer sein kann. Die Gesamtheit der Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ mit $f(X_0) = y_0$ bildet einen Raum Ω , der mit der kompakt-offenen Topologie im Sinne von R. H. Fox versehen wird. Es sei $O: X \rightarrow Y$ die konstante Abbildung $O(X) = y_0$ und Ω_0 die Wegekompante von O in Ω . Die Arbeit handelt von den Homotopiegruppen $\pi_r(\Omega_0)$ ($r = 1, 2, \dots$). Es wird gezeigt, daß es für jedes $r \geq 1$ einen Homomorphismus $\tau_r: \pi_r(\Omega_0) \rightarrow \pi_r(Y)$ gibt, so daß τ_r ein Homomorphismus auf $\pi_r(Y)$ ist, wenn X_0 leer ist, während im anderen Falle $\pi_r(\Omega_0)$ in das Einselement von $\pi_r(Y)$ abgebildet wird. Der Kern K von τ_r ist eine auflösbare Untergruppe von $\pi_r(\Omega_0)$ und hat eine absteigende Folge von Untergruppen $K = K_0 \supset K_1 \supset \dots \supset K_m = 1$ ($m = \dim(X - X_0)$), so daß jede Normalteiler der vorangehenden ist und die Faktorgruppe K_{n-1}/K_n ($n = 1, 2, \dots, m$) abelsch ist. Wenn X_0 leer ist, so existiert eine Untergruppe T von $\pi_r(\Omega_0)$, die bei τ_r isomorph auf $\pi_r(Y)$ abgebildet wird. Für $r > 1$ ist $\pi_r(\Omega_0)$ direkte Summe der Untergruppen T und K . $\pi_1(\Omega_0)$ ist dann und nur dann direkte Summe von T und K , wenn T Normalteiler von $\pi_1(\Omega_0)$ ist. Für $X = S^m$ (m -Sphäre) ergeben sich frühere Ergebnisse von M. A be (dies. Zbl. 23, 382) und Verf. (dies. Zbl. 29, 422).

Herbert Seifert.

Chen, Chieh: A note on the classification of mappings of a $(2n-2)$ -dimensional complex into an n -sphere. *Ann. of Math.*, II. Ser. **51**, 238—240 (1950).

Die Klassifikation der Abbildungen eines m -dimensionalen Komplexes ($m < 2n-2$) in die n -Sphäre von S. T. Hu (dies. Zbl. **32**, 125) wird auf den Fall $m = 2n-2$ ausgedehnt.

E. Specker.

Quast, J. und Fred. Schuh: Einige Wegprobleme. *Simon Stevin* **27**, 201—211 (1950) [Holländisch].

C und D seien zwei Ecken eines endlichen Graphen; wie viele Wege gibt es, die in C anfangen und in D enden und bei denen jede Strecke des Graphen höchstens einmal durchlaufen wird? Die Frage kann dadurch abgewandelt werden, daß Wege, deren Strecken denselben Teilgraphen bilden, nicht als verschieden betrachtet werden; sie kommt dann hinaus auf die nach der Anzahl der von C und D berandeten Teilgraphen. — Verff. behandeln diese Aufgabe für gewisse Klassen von Graphen $G(n)$, deren jede von einer natürlichen Zahl n abhängt. Beispiel: $G(n)$ habe in einem Cartesischen Koordinatensystem die Ecken $(-k/n, 0)$, $(k/n, 0)$, $(0, -k/n)$ mit $k = 0, 1, 2, \dots, n$ und die Strecken längs der Achsen oder unter $\pm 45^\circ$, die diese Punkte verbinden, C und D seien die Punkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$. — Bei jeder Klasse erhält man für die Zahl $w(n)$ der fraglichen Wege von $G(n)$ eine Rekursions-

formel der Gestalt $w(n) = \sum_{v=1}^h \alpha_v w(n-v)$ mit von n unabhängigen α_v und h , aus der sich $w(n)$ mittels Zahlen eines geeigneten algebraischen Zahlkörpers in endlicher Form bestimmen läßt.

Gerrit Bol.

Theoretische Physik.

Elastizität. Plastizität:

● Bažant, Z.: Elastizitäts- und Festigkeitslehre. Praha: Věd.-techn. nakl. 1950. 507 S. [Tschechisch].

Morinaga, Kakutarô and Takayuki Nôno: On stress-functions in general coordinates. *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A **14**, 181—194 (1950).

Es werden einige Sätze über die allgemeine Lösung der Spannungsgleichungen im 2-, 3- und n -dimensionalen Raum in Tensorschreibweise mitgeteilt.

Joachim Pretsch.

Sekiya, Tsuyoshi: On a method of solving the elastic plane stress problems by the aid of integral equation. *J. Osaka Inst. Sci. Technol.*, Part I **2**, 29—40 (1950).

In einer früheren Arbeit (Negoro und Verf., dies. Zbl. **38**, 373) war eine allgemeine Methode zur numerischen Berechnung der elastischen Spannungen in einer mehrfach zusammenhängenden Platte beliebiger Form unter beliebigen äußeren Kräften in der Plattenebene gegeben worden, die jedoch den Nachteil hatte, daß zweite Ableitungen numerisch berechnet werden müssen. Die von Lauricella [*Acta math.* **32**, 201—256 (1909)] zunächst nur für die einfach zusammenhängende Platte vorgeschlagene Methode enthält nur erste Ableitungen und wird darum hier auf den mehrfach zusammenhängenden Bereich ausgedehnt.

Joachim Pretsch.

Radenković, D.: Une solution du problème à deux dimensions de la théorie de l'élasticité. *Acad. Serbe Sci.*, Publ. math. **3**, 127—136 (1950).

Die Verteilung der Normalspannungen über der Dicke in einer gleichmäßig belasteten rechteckigen Platte wird durch Reduktion des biharmonischen Problems auf ein harmonisches Problem gelöst. Sie stimmt mit derjenigen von Bay und Bortsch zahlenmäßig überein.

Joachim Pretsch.

Melan, E.: Wärmespannungen in Scheiben. *Österreich. Ingenieur-Arch.* **4**, 153—156 (1950).

Folgendes wird nachgewiesen: in einer unendlich dünnen Scheibe sei die Temperaturverteilung quellenfrei und stationär, die Ränder seien frei, so daß thermoelastische Verschiebungen ungehindert stattfinden können; alsdann treten in der Scheibe keinerlei Spannungen auf. Hingegen treten bei nichtstationärer Temperaturverteilung, also etwa beim Erwärmen oder Abkühlen Spannungen auf. Da diese Spannungen Funktionen des zeitlichen Temperaturgradienten $\partial T/\partial t$ sind, kann man, indem man die Temperaturänderungen hinreichend langsam vor sich gehen läßt, dafür Sorge tragen, daß die Spannungen hinreichend klein bleiben.

Erwin Hardtwig.

Southwell, R. V.: On the analogues relating flexure and extension of flat plates. Quart. J. Mech. appl. Math. 3, 257—270 (1950).

Es wird gezeigt, daß die beiden Plattenanalogien (Biegung mit Kantenverschiebung und Dehnung mit Kantenzug; Dehnung mit gegebener Kantenverschiebung und Biegung mit gegebenem Zug auf der Begrenzung) in einer einzigen Verallgemeinerung zusammengefaßt werden können, die bei der Behandlung gemischter Randbedingungen und bei perforierten Platten benutzt werden kann.

Joachim Pretsch.

Nash, W. A.: Bending of annular elliptical plates loaded by edge moments. Bull. Calcutta math. Soc. 42, 189—198 (1950).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit [J. Appl. Math. 1, 116 (1950)] wird das Problem kleiner Auslenkungen einer dünnen Platte behandelt, die von zwei konfokalen Ellipsen begrenzt ist und entlang beider Begrenzungen durch Biegemomente beansprucht wird. Es werden die drei Fälle gelöst, in denen nur je eine oder beide Begrenzungen unterstützt sind und eine gegebene Auslenkung senkrecht zur Plattenmittelebene erfahren.

Joachim Pretsch.

Müller-Magyari, F.: Ein einfaches Näherungsverfahren zur Bestimmung der Stabilitätsgrenze eines versteiften Plattenstreifens unter Längsdruck. Österreich. Ingenieur-Arch. 4, 156—159 (1950).

Das Näherungsverfahren zur Berechnung der kritischen Druckspannung eines versteiften Plattenstreifens wird für den Fall des „langwelligen“ Beulens entwickelt. Da in diesem Falle die Versteifungsrippen sich wesentlich an dem Knickvorgang beteiligen, so wird ihr Ausknicken als Primäre angesehen. Die Stabilitätsgrenze des Systems Platte und Rippe wird dementsprechend aus der Stabilitätsgrenze der Rippe als eines durch die Platte elastisch gebetteten Stabes ermittelt, wobei für die Beulfigur ein plausibler Ansatz gewählt wird. Die Knickkräfte in der Platte werden mittels einer „Ersatzrippenquerschnittsfläche“ berücksichtigt. Das Verfahren wird am Sonderfalle eines einseitig eingespannten Plattenstreifens mit einer Rippe am anderen Rande erläutert. Rechenergebnisse für Platten mit relativ steifen Rippen zeigen gute Übereinstimmung mit den Rechenergebnissen nach der energetischen Methode. Das Näherungsverfahren scheint darauf hinauszulaufen, daß man in dem Energieausdruck die Arbeit der zusätzlichen Plattenspannungen in der Schnittfläche quer zur Rippe vernachlässigt. *A. Kromm.*

Cchadaja, F. G.: Untersuchung der Stabilität einer rechtwinkligen Platte veränderlicher Dicke mit der Methode der endlichen Differenzen. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze 17, 191—201 und grusinische Zusammenfassg. 201 (1949) [Russisch].

Verf. untersucht die Stabilität einer längs $x = 0, a$ bzw. $y = 0, b$ gelenkig gelagerten Rechteckplatte unter einem in Richtung x wirkenden, mit y veränderlichen Druck. Die Plattendicke ist dabei in Richtung x durchweg, in Richtung y streckenweise konstant. Der Ansatz $w = f(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$ ($m =$ ganze Zahl) für die Auslenkung führt auf eine Differentialgleichung für die Funktion $f(y)$. Nach Ersatz dieser Gleichung durch eine fünfgliedrige Differenzengleichung sowie nach Befriedigung der Grenzbedingungen bei $y = 0, b$ ergibt sich durch Nullsetzung der Nennerdeterminante die Beulbedingung. Zu ihrer Auswertung empfiehlt Verf. eine von E. Mikeladse herrührende für beliebige Determinanten gültige Auflösungsmethode.

S. Woinowsky-Krieger.

Bogunović, V.: Beulung der Gurtplatten von Rippenkonstruktionen. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 3, 271—286 (1950).

Verf. untersucht einen Plattenbalken, welcher einem System parallel liegender, gleichartiger und gleichartig belasteter Balken angehört. Der Plattenbalken ist frei aufliegend bei gegebener Stützweite und wird einer gleichmäßigen Belastung in der Rippenebene unterworfen. Unter der Annahme, daß es sich bei dem Plattenbalken um ein dünnes Blech von unbedeutend kleiner Biegesteifigkeit handelt, kann der Spannungszustand dann als ein ebener betrachtet werden. Daher können sowohl in der Rippe, als auch im Gurtblech die Spannungen durch Ableitung biharmonischer Funktionen dargestellt werden, für welche unendliche Reihen angesetzt werden. Neben den üblichen Randbedingungen ist besonders an der Fuge zwischen Rippe und Gurtblech die Bedingung gleicher Dehnung zu beachten gewesen. Damit findet Verf. zunächst die Spannungsfunktionen für die Rippe und die Gurtplatte, die er auf zwei Fälle anwendet. Ausgehend von der Differentialgleichung der Ausbiegung einer Platte, die an den Rändern frei aufliegt, erhält er dann ein Gleichgewichtssystem, das die Beulbedingung liefert, aus der die kritischen Werte der Belastung berechnet werden können. Dies wird in einem Beispiel für eine Rippenkonstruktion mit besonders vorgegebenen Abmessungsverhältnissen durchgeführt. Weiter wird gezeigt, wie bei der Bemessung des Plattenbalkens nach der elementaren Biegetheorie, also mit der „zulässigen Spannung“ vorzugehen ist. Es muß dann zur Annahme eines ideellen Plattenbalkens übergegangen werden, bei welchem die Randspannung der Rippe genau den gleichen Wert wie bei Zugrundelegung der strengen Theorie ergibt. Dies wird ebenfalls an Hand eines Beispiels gezeigt. Es sei erwähnt, daß Verf. auf die auf diesem Gebiet bereits bestehende umfangreiche Literatur nicht Bezug genommen hat.

Karl Karas.

Federhofer, K.: Kippsicherheit des kreisförmig gekrümmten Trägers mit einfach-symmetrischem, dünnwandigem und offenem Querschnitte bei gleichmäßiger Radialbelastung. Österreich. Ingenieur-Arch. 4, 27—44 (1950).

Einleitend zitiert Verf. die bereits bekannten Ergebnisse über die Kippstabilität eines kreisförmig gekrümmten Trägers mit doppelsymmetrischem Profil, sowie diejenigen des geraden Trägers mit doppel- und einfachsymmetrischem Profil. Zur Lösung des Stabilitätsproblems wendet Verf. die Energiemethode an, mittels derer er aus der Formänderungsarbeit, der Arbeit der Axialkräfte, sowie der Arbeit der äußeren Kräfte unter elastischer Verschiebungs- und Drehbettung unter den speziellen beiden Annahmen, daß die Drücke q einmal nach der Verzerrung parallel zur Bogenebene bleiben und ferner, daß sie nach der Verzerrung zum Kreismittelpunkt hin gerichtet sind, mit Ausnutzung der Variationsrechnung die Randbedingungen und Stabilitätsbedingungen findet. Damit erhält er den auf den Schubmittelpunkt des Querschnittes bezogenen reduzierten Wölbwiderstand. — Mit Hilfe der gewonnenen Grundgleichungen wird der kritische Wert q_{kr} des Außendruckes q des geschlossenen freien Ringes mit einfachsymmetrischem Querschnitt bestimmt, wobei die Symmetrieachse des Querschnittes in die Bogenebene, also in die Belastungsebene fällt. Das für q_{kr} gefundene Ergebnis beinhaltet auch gleichzeitig die Sonderfälle des doppelsymmetrischen I-Querschnittes, des wölbungsfreien einfachsymmetrischen Querschnittes und des schmalen Rechteckquerschnittes. — Des weiteren wird der kritische Kippdruck des an beiden Enden gelenkig festgehaltenen Kreisbogenträgers unter der Voraussetzung, daß die Stirnflächenverwölbung der beiden Endquerschnitte unbehindert sei, aus den Grundgleichungen bestimmt und dabei auch der Grenzfall des an beiden Enden gelenkig befestigten geraden Trägers mit erfaßt. Die Abhängigkeit des kritischen Kippdruckes vom elastischen Widerstande, sowohl gegen Verschiebungen normal zur Ebene als auch gegen Verdrehung der Querschnitte, erlaubt nun unmittelbar die Kreisfrequenz des radial gedrückten elastischen Kreisbogens und Kreisringes für seine Schwingungsenkrecht zur Bogenebene anzugeben. Abschließend wird die Kippsicherheit des Kreisbogenträgers mit eingespannten Enden untersucht. Die Kompliziertheit der strengen Lösung dieses Falles läßt voraussichtlich nur Näherungslösungen nach Galerkin und Ritz zu, über die Verf. in späteren Arbeiten zu berichten gedenkt.

Karl Karas.

Džanelidze, G. Ju.: Zur Theorie der dünnen und dünnwandigen Stäbe. Priklad. Mat. Mech. 13, 597—608 (1949) [Russisch].

Die Elastostatik und die Stabilitätstheorie eines Stabes mit dünnwandigem offenem Querschnitt hat in der grundlegenden Arbeit von R. Kappus [Luftfahrt-Forschung 14, 444 (1937)] ihre Abklärung erfahren. Anknüpfend an die später erschienenen Veröffentlichungen von Vlasov („Dünnwandige elastische Stäbe“, Moskau 1940) wird in der vorliegenden Arbeit das elastostatische Problem auf dünne und dünnwandige Stäbe mit offenem oder geschlossenem Profil verallgemeinert. Dabei wird wieder von der Erhaltung der Querschnittform des Stabes ausgegangen ($\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$, x, y = Hauptträgheitsachsen des Stabquerschnittes). Die Schubverzerrungen γ_{xz} und γ_{yz} (z = Stabachse) werden als von der Verdrehung τ allein hervorgerufen angenommen [$\gamma_{xz} = \tau(\partial\varphi/\partial x - y)$, $\gamma_{yz} = \tau(\partial\varphi/\partial y + x)$ mit φ = Torsionsfunktion] — eine Annahme, die bei geschlossenen Profilen einer näheren Begründung bedarf. Schließlich wird der Ausdruck für die Längsdehnung ε_z durch das Glied $\varphi(x, y) \partial\tau/\partial z$ infolge der behinderten

Querschnittsverwölbung ergänzt: $\varepsilon_z = \varepsilon + \kappa_1 y - \kappa_2 x + \varphi(x, y) \cdot \dot{\tau}$ (κ_1, κ_2 = Krümmungen der Stabachse). Ausgehend von diesen „kinematischen“ Hypothesen werden mit Hilfe der Energiemethode die Beziehungen zwischen den Schnittkräften und den Verzerrungen hergeleitet, die dann auf die früher behandelten Fälle der dünnwandigen offenen (Kappus und Vlasov) und geschlossenen (U manskij 1940) Profile spezialisiert werden. Zum Schluß werden mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips die Differentialgleichungen für die Biegedrillschwingungen eines Stabes aufgestellt. A. Kromm.

Gorgidze, A. Ja.: Verdrillung und Verbiegung von zusammengesetzten Stäben mit schwach gebogenen Achsen. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze 17, 95—129 und grusinische Zusammenfassg. 130 (1949) [Russisch].

Das Problem des zusammengesetzten prismatischen Stabes, der einer Torsion, einem Zug, einer reinen Biegung oder einer Biegung durch Querkraft unterworfen ist, wurde zuerst von N. M. Muschelišvili (1932) grundsätzlich gelöst. Der Körper besteht dabei aus einer Anzahl zylindrischer Stäbe, die sämtlich in einem anderen elastischen Material mit gleichfalls zylindrischer Begrenzung eingebettet sind. In Anlehnung an die Methode von Muschelišvili entwickelt Verf. eine allgemeine Lösung für den analogen Aufgabenkomplex unter der Annahme jedoch, daß die Achsen aller Teilstäbe sowie des Gesamtstabes einer flachen Parabel folgen. Hinsichtlich Elastizität wird lediglich vorausgesetzt, daß die Querdehnungszahl aller Bestandteile dieselbe ist. Die Methode findet Anwendung auf den Sonderfall eines schwach gekrümmten Kreisrohres mit einem Kern aus anderem Material

S. Woinowsky-Krieger.

Dol'berg, M. D.: Über Formen des Verlustes der Stabilität von Stäben. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 71, 839—842 (1950) [Russisch].

Gegenstand dieser Arbeit ist Untersuchung von Stabilitätseigenschaften, insbesondere von Knickformen eines über mehrere starre Stützen durchlaufenden Stabes mit einer stückweise stetig veränderlichen Biegesteifigkeit und ebensolchem Axialdruck. In Erweiterung einer Arbeit von O. Blumenthal [Z. angew. Math. Mech. 17, 232—244 (1937)] wird, neben einigen Hilfssätzen, der Satz bewiesen, wonach die n -te Gleichgewichtsform des ausgeknickten Stabes genau $n + 1$ Knoten aufweist, die Zwischenstützpunkte des Stabes nicht mitgerechnet.

S. Woinowsky-Krieger.

Serafimow, Peter R.: Beiträge zur Hyperbelschale. I. und II. Fac. Philos. Univ. Skopje, Sect. Sci. nat., Annuaire 3, Nr. 9, 14 S. und deutsche Zusammenfassgn. 7, 15 (1950) (Kroatisch).

Alumjaë, N. A.: Über eine Formel für die kritische Spannung des momentfreien Spannungszustandes dünnwandiger elastischer Schalen. Priklad. Mat. Mech. 13, 647—649 (1949) [Russisch].

Der kritische Außendruck einer Kugelschale und die kritische Druckspannung einer kreiszylindrischen Schale berechnen sich aus der Formel $\sigma_{kr} = E t / \sqrt{3(1-\nu^2)} R$. In der Arbeit wird für den Spannungszustand einer beliebig geformten Schale eine solche Bedingung aufgestellt, bei deren Erfüllung sich die kritische Belastung der Schale aus einer Formel ermitteln läßt, die der oben angeführten analog ist.

A. Kromm.

Lufe, A. I.: Über die Gleichungen der allgemeinen Theorie der elastischen Schalen. Priklad. Mat. Mech. 14, 558—560 (1950) [Russisch].

In der Biegetheorie der Schalen wird jede der beiden Normalspannungen durch ein statisch äquivalentes System, bestehend aus einer Schnittkraft und einem Biegemoment ersetzt. Die Verteilung der Schubspannungen allein wird dagegen durch vier statisch äquivalente Schnittgrößen berücksichtigt. Verf. zeigt, daß diese vier Größen in allen Gleichungen der Schalentheorie durch zwei Größen ersetzt werden können, die mit den üblichen vier Schnittgrößen in einem einfachen Zusammenhang stehen.

A. Kromm.

Alumjaé, N. A.: Die Differentialgleichungen der Gleichgewichtszustände dünner elastischer Schalen im nachkritischen Stadium. *Priklad. Mat. Mech.* 13, 95—106 (1949) [Russisch].

Es werden die Differentialgleichungen der Schalentheorie für den überkritischen Bereich mit Hilfe der Tensorrechnung in allgemeinen krummlinigen Koordinaten aufgestellt. Dabei wird außer der Gültigkeit der Kirchhoffschen Hypothese noch vorausgesetzt, daß die Verzerrungen auch bei großen Deformationen kleine Größen sind und daß der Grundspannungszustand (an der Stabilitätsgrenze) ein Membranspannungszustand ist. Aus den vollständigen Gleichungen werden dann auf Grund einer Analyse der Größenordnung einzelner Terme vereinfachte Gleichungen für flache Schalen hergeleitet, die in den Sonderfällen einer ebenen Platte und einer kreiszylindrischen Schale in die Gleichungen von Kármán und die von Donnell übergehen.

A. Kromm.

Green, A. E. and W. Zerna: The equilibrium of thin elastic shells. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 3, 9—22 (1950).

In der Arbeit werden die Grundlagen der allgemeinen Schalentheorie erster Näherung mit Hilfe des modernen Tensorkalküls entwickelt (s. a. W. Zerna, dies. Zbl. 32, 221). Nach einem kurzen Bericht über die bisher vorliegenden Arbeiten werden die Gleichgewichtsbedingungen ausgedrückt in den Spannungsergebnanten und Momenten (Schnittgrößen) in allgemeiner Form aufgestellt und das Elastizitätsgesetz angegeben. Hieraus werden die Differentialgleichungen der Schnittgrößen für eine Näherung entwickelt unter der Annahme $\lambda = t/L \ll 1$ (t Schalendicke, L irgendeine in bezug auf die Mittelfläche definierte charakteristische Länge) und quadratischer Verteilung der Schubspannungen über die Schalendicke. Auf die sonst übliche weitere Annahme, daß die Normalen der Mittelfläche der undeformierten Schale in solche der deformierten übergehen, wird verzichtet. Durch Übergang zur Platte gelangt man hieraus zu der von Reißner (*J. Math. Phys.* 23, 184 (1944), *J. Appl. Mech.* 12, 68 (1945), *Quart. Appl. Math.* 5, 55 (1947)) entwickelten Plattenbiegetheorie, wobei sich auch Übereinstimmung hinsichtlich der (bei Reißner von der bisherigen Theorie abweichenden) Zahl der Randbedingungen ergibt.

Fritz Reutter.

Zerna, W.: Berechnung an den Rändern belasteter, allgemeiner Schalen. *Z. angew. Math. Mech.* 30, 370—374 (1950).

Mit Hilfe des von Green und Zerna (vorsteh. Referat) entwickelten Formelapparates für die allgemeine Theorie dünner elastischer Schalen wird der Fall einer Schale behandelt, die nur an den Rändern durch Kräfte oder Momente beansprucht, im übrigen aber unbelastet ist. Dazu werden die zu den Längskräften gehörigen Schnittgrößen mit Hilfe einer skalaren Spannungsfunktion Φ und zweier vektorieller Funktionen ausgedrückt. Einsetzen in die Gleichgewichtsbedingungen führt auf ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen für Φ und die Verschiebungskomponente V_3 , von denen die erste in Φ von 4. Ordnung ist. Dieses System läßt sich auf eine einzige komplexe Differentialgleichung 4. Ordnung für die Funktion $\psi = V_3 + i K \Phi$ (K abhängig von der Schalendicke und den elastischen Konstanten) umschreiben.

Fritz Reutter.

Parkus, H.: Die Grundgleichungen der Schalentheorie in allgemeinen Koordinaten. *Österreich. Ingenieur-Arch.* 4, 160—174 (1950).

In den letzten Jahren sind eine Reihe von Arbeiten über die Grundgleichungen der Schalentheorie unter Benutzung des absoluten Differentialkalküls erschienen (s. z. B. Zerna, dies. Zbl. 32, 221 und die beiden vorsteh. Referate). Jedoch wurden die Gleichgewichtsbedingungen nur für die Schnittgrößen angeschrieben. In der vorliegenden Arbeit werden nun explizit die Differentialgleichungen für die Verschiebungen einer „dünnen“ Schale veränderlicher Wandstärke sowie die Randbedingungen in allgemeinen Koordinaten unter Berücksichtigung von Wärmespannungen hergeleitet. — Nach kurzer Angabe der geometrischen Grundlagen und Formulierung der üblichen Annahmen aus der Theorie dünner Schalen werden der Verzerrungstensor

und der Spannungstensor (Schnittgrößen) aufgestellt und die potentielle Energie Π in Abhängigkeit von den Verschiebungen angegeben. Hieraus folgen die Differentialgleichungen für die Verschiebungen als Euler-Lagrangesche Gleichungen des Variationsproblems $d\Pi = 0$. Zusammen mit den geometrischen Bedingungen erhält man an jedem Rand vier Randbedingungen, wobei auch der Fall freier Ränder in die Behandlung einbezogen ist. Nach Ermittlung der Verschiebungen durch Integration der Grundgleichungen sind die Schnittgrößen zu bestimmen, die ebenfalls in allgemeiner Form explizit durch die Verschiebungen ausgedrückt werden. Sie ergeben sich zunächst aus den in der Metrik des Riemannschen R_2 der Schalenmittelfläche gemessenen Spannungsvektoren, daher ist noch der Übergang zu den gebräuchlichen euklidischen Schnittgrößen zu vollziehen. Abschließend werden alle zur Anwendung des entwickelten Apparates erforderlichen differentialgeometrischen Größen für eine Reihe wichtiger Schalenmittelflächen explizit angegeben. Fritz Reutter.

Majer, J.: Das reine Randwertproblem des ebenen elastischen Keiles. Österreich. Ingenieur-Arch. 4, 290—303 (1950).

Es wird ein von zwei sich schneidenden Halbgeraden (halber Öffnungswinkel $\alpha \leq \pi/2$) begrenzter keilförmiger ebener Bereich für eine allgemeine Belastung längs der geradlinigen Ränder betrachtet. Längs $\vartheta = \pm \alpha$ sind also σ_ϑ und $\tau_{r\vartheta}$ vorgegeben. Überlegungen bezüglich des unendlich fernen Randes zeigen, daß die Spannungen im Keil (allenfalls mit Ausnahme des Randes und der Spitze) reguläre Funktionen sind. Ferner müssen die Ungleichungen (*) $\sigma \leq C(\varepsilon) r^{-\delta}$ für $\sigma = \sigma_r$, $\sigma = \sigma_\vartheta$, $\sigma = \tau_{r\vartheta}$ mit $\delta > 0$, $|\vartheta| \leq |\alpha - \varepsilon|$, $\varepsilon > 0$ erfüllt sein. Durch Einführung der Airyschen Spannungsfunktion wird die Aufgabe auf das Randwertproblem $\Delta \Delta F = 0$, F und $\partial F / \partial n$ am Rande gegeben, zurückgeführt. Zur Lösung werden zwei symmetrische Spannungsfunktionen F_1 und F_2 und zwei antisymmetrische F_3 und F_4 angesetzt, wobei F_1 und F_2 die Ränder schubspannungsfrei, F_3 und F_4 normalspannungsfrei lassen; alle F_i werden aus partikulären Integralen der Laplaceschen Gleichung aufgebaut, so daß

$$F_k(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} r^{-n+2} f_k(\vartheta, n, \alpha) \psi_k(n) dn, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

wo $\psi(n)$ gemäß den Randbedingungen zu bestimmen ist. Dies gelingt mit Hilfe der Mellintransformation: Mit $\varphi(n) = p a^n / n$, $n = x + iy$, $x > 0$ wird $\psi_k(n) = \varphi_n / f_{k, \sigma_\vartheta}$, $k = 1, 2$,

$\psi_k = \varphi_n / f_{k, \tau_{r\vartheta}}$, $k = 3, 4$ [$f_k(\vartheta, n, \alpha)$, f_{k, σ_ϑ} , $f_{k, \tau_{r\vartheta}}$ sind bekannte Ausdrücke aus Produkten trigonometrischer Funktionen vom Argument $(2-n)\vartheta$, $(2-n)\alpha$ mit den Faktoren n , $2-n$, $2+n$]. Mit Hilfe der bekannten Eigenschaften der Mellintransformation läßt sich eine Bedingung für die Randlast angeben, die hinreicht, damit die Keilspannungen die Ungleichungen erfüllen. Als Anwendungsbeispiele werden die zum Teil aus speziellen Untersuchungen bereits bekannten Fälle a) Halbebene mit Randnormalbelastung, b) Keil mit zwei symmetrischen Einzellasten sowie mit Einzellastangriff an der Spitze in Richtung der Winkelhalbierenden behandelt. — Vgl. hierzu auch C. J. Tranter, dies. Zbl. 33, 312. Fritz Reutter.

● **Hill, R.: The mathematical theory of plasticity.** London: Geoffrey Cumberlege; Oxford: At the Clarendon Press 1950. IX, 356 p. 35 s.

In Beschränkung auf quasistatische Vorgänge zeichnet sich das vorliegende Buch durch eine nahezu enzyklopädische Berücksichtigung nicht nur des westlichen, sondern auch des russischen sehr reichen Schrifttums bei durchaus einheitlichem lehrbuchartigen Charakter aus. In flüssigem Stil basieren die Ausführungen stets auf der physikalischen Anschauung, sind jedoch mathematisch streng. Zahlreiche bisher unveröffentlichte Untersuchungen des Verf. sind mit aufgenommen. Dadurch ist das auch äußerlich wohl ausgestattete Buch nicht nur dem Lernenden, sondern auch dem Kenner eine wertvolle Fundgrube. — Kap. I: Nach einer historischen Einleitung und einem Überblick über die bei plastischen Deformationen auftretenden mikrophysikalischen Vorgänge wird die statische Spannungs-Dehnungskurve eingeführt. — Kap. II: Definition des isotropen idealplastischen Körpers gemäß Handelman-Prager durch Einführung des plastischen Potentials und der Fließbedingung mit und ohne isotrope Verfestigung. Weiterhin benutzt werden die verallgemeinerten Reußschen Gleichungen mit zwei willkürlichen bei der Behandlung einzelner Probleme dann meist als untereinander und oft mit der Miseschen Fließfunktion zusammenfallenden Funktionen. Ablehnung finiter Stoffgesetze wie der Hencky-Gleichungen. — Kap. III: Beweis des Extremalsatzes von Mises sowie des Eindeutigkeitssatzes von Melan und verwandter Sätze für allgemeines Reußsches Material. Übertragung der Variationsprinzipie der Elastizitätstheorie für infinitesimale Deformationen in Reußschem oder reinplastischem Material mit und ohne Verfestigung unter exakter Formulierung der Gültigkeitsbedingungen. — In den Kap. IV und V Anwendung der Theorie auf elasto-plastische Probleme folgender drei Gruppen: a) Probleme ohne rein-elastische Gebiete wie die simultane Torsion und Dehnung eines dünnwandigen Hohlzylinders (Hohenemser-Versuch). b) Probleme mit Grenzen Σ zwischen rein-elastischen und elasto-plastischen jedoch sehr kleinen Deformationen wie die Torsion von prismatischen Stäben; speziell die Lösung von St. Venant und die von Sokolov-

skij. Charakteristisch für die Freiheit des Buches vom formal Mathematischen ist das hier vermerkte Fehlen eines Beweises, daß die von Sokolovskij angenommene Gestalt von Σ sich durch Torsion aus einem Ausgangszustand erzeugen läßt. c) Problem mit sphärischer oder axialer Symmetrie wie die elasto-plastische Ausdehnung einer zunächst spannungsfreien Hohlkugel bei Innendruck und eine sehr ausführliche entsprechende Theorie für den unendlich langen Hohlzylinder. Abschätzung des Einflusses der Wahl der Fließbedingung und des Fehlers bei Benutzung finiter Stoffgesetze. — Der folgende größte Teil (S. 128–340) des Buches beschäftigt sich im wesentlichen mit Problemen für rein-plastisches Material, das den Reußschen Gleichungen mit unendlichem Elastizitätskoeffizienten und der Fließbedingung von Tresca oder von Mises genügt. In Verschärfung der ursprünglichen Henckyschen Definition wird ein Problem statisch bestimmt genau dann genannt, wenn das Spannungsfeld ohne Benutzung des Geschwindigkeitsfeldes festgelegt ist. Hierfür ist notwendig, daß jede Gleitlinie eine Σ höchstens einmal trifft. — Die allgemeine Theorie des Gleitlinienfeldes (Gl. F.) mit den Kötterschen (meist Hencky zugeschriebenen) Grundgleichungen in charakteristischen Koordinaten und den beiden Henckyschen Theoremen zur Geometrie des Gl. F. werden in Kap. VI abgeleitet und die graphische Lösung verschiedener Randwertaufgaben demonstriert, was zum Beweis der Existenz vollstarrer Bereiche innerhalb des plastischen Bereiches in der Umgebung eines Σ führt. Angabe der analytischen Lösung mittels Besselfunktionen. Spezielle Lösungen für das Gl. F.: $\alpha)$ $x = \text{const}$, $y = \text{const}$; $\beta)$ $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$; $\gamma)$ zwei Kreisbogenscharen, die mit stetiger Tangente an zwei Geradenbüschel anschließen; tabularische Niederlegung der Netzpunkte dieses Feldes. Im gleichen Kapitel erscheint die Theorie der Spannungsdiskontinuitätslinien (DL) mit dem Satze über die Stetigkeit der Fließgeschwindigkeit längs DL. — Anwendung der Theorie des Gl. F. in Kap. VII für stationäre Probleme. Besonderes Gewicht wird stets auf die Notwendigkeit gelegt, auch das Geschwindigkeitsfeld zu berechnen, um die Erfüllung der diesbezüglichen Randbedingungen und vor allem die Stetigkeit längs der DL zu prüfen (verschiedene in der Literatur gegebene Lösungen sind diesbezüglich falsch!). Aus den Typen α , β , γ wird das Gl. F. beim Ziehen eines Bleches durch eine mäßig geneigte Düse und das für verwandte Probleme wie das Eindringen eines flachen Stempels aufgebaut. Die Karmansche Theorie des Blechrollens und die Merchantsche Theorie des Hobelns werden kritisch dargestellt. — Kap. VIII behandelt solche instationäre zweidimensionale Probleme, bei denen die Konfiguration geometrisch ähnlich bleibt; z. B. die Hill-Lee-Tupperschen Theorien des Eindringens eines Keils in eine Halbenebene mit Verformung der Oberfläche und der Kompression eines unendlichen Streifens zwischen zwei harten endlichen Platten mit der Prandtlschen Lösung als Grenzfall sehr breiter Stempel. — In Kap. IX werden dagegen allgemeinere zweidimensionale instationäre Aufgaben für inkompressibles Misessches elastoplastisches Material ohne Verfestigung unter der Voraussetzung sehr kleiner Deformationen behandelt. Hierher gehören die Southwell-Allensche Theorie der Dehnung eines gekerbten Streifens und damit verwandte Theorien von Härtetests; des weiteren die Arbeiten von Galin und Parasjuk über den plastischen Zustand in der Umgebung eines Loches. — Kap. X behandelt reinplastisches Material für axialsymmetrische Belastung. Die Theorie des Gl. F. in den Meridianschnitten liefert nichthyperbolische, den Kötterschen Gleichungen entsprechende Differentialgleichungen mit Gliedern, die die unbekannte Tangentialspannung enthalten, jedoch bei $r \rightarrow \infty$ verschwinden. Einige Aufgaben wie das Ziehen eines Drahtes oder eines dünnwandigen Zylinders (Resultantenmethode) durch eine Düse werden mit Hilfe von Zusatzhypothesen behandelt, die aus dem Experiment abgelesen sind. Bridgmansche Theorie der Einschnürung. — Kap. XI schließt die Behandlung des isotropen Materials mit einigen Nachträgen ab. Neben Betrachtungen über das Tiefziehen einer Platte aus reinplastischem Material zu einem Becher und der strengen Behandlung der Biegung einer reinplastischen Platte zu einem Kreisbogen findet man hier die allgemeine Theorie des Gl. F. für die zweidimensionale Deformation reinplastischen Materials mit beliebiger isotroper Fließbedingung. Das Differentialgleichungssystem ist hyperbolisch genau dann, wenn der Spannungskreis die Mohrsche Hüllkurve berührt. Für diesen Fall Ableitung der Mandelschen Gleichungen und des Analogums zum ersten Henckyschen Theorem. Das Entsprechende bei Voraussetzung der Misesschen Fließbedingung für ebene Spannungszustände bei variabler (anfänglicher oder durch die Deformation entstandener) Plattendicke. Spannungs- und Geschwindigkeitsfeld haben die gleichen reellen Charakteristiken; als Anwendung die Taylorsche Theorie der Aufblähung eines kreisförmigen Loches in einer unendlichen Platte anfänglich konstanter Dicke mit Berücksichtigung der Aufbördelung des Randes und der Existenz eines starren plastischen Ringbereiches. — Kap. XII ist der Theorie der anisotropen Plastizität reinplastischen Materials mit einer quadratischen Form als Fließbedingung gewidmet. Theorie des Zugversuches eines schräg aus gerolltem Blech ausgeschnittenen Streifens und Betrachtungen über die Bildung von Lappen beim Tiefziehen von Bechern. — Übertragung der Kötter-Henckyschen Theorie der zweidimensionalen Verformung auf obiges Material. Die Charakteristiken sind Linien maximaler Scherung, aber nicht mehr maximaler Scherspannung. Das erste Henckysche Theorem gilt bei Ersatz des Richtungswinkels θ durch eine mit elliptischen Integralen ausdrückbarer Funktion von θ . Die in Kap. VI eingeführten weiterhin gültigen Gl. F.-Typen α), β) dienen zur Konstruktion eines gegenüber dem isotropen Falle verschobenen Gl. F. beim Druck eines flachen Stempels auf die gerade Oberfläche einer Halbenebene.

Hans Richter.

● Sokolovskij, V. V.: *Theorie der Plastizität*. 2. Aufl. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für techn.-theor. Lit. 1950. 336 S. [Russisch].

Panferov, V. M.: *Über die Konvergenz der Methode der elastischen Lösungen in der Theorie der elastisch-plastischen Deformationen von Schalen*. Priklad. Mat. Mech. 13, 79—94 (1949) [Russisch].

Die im Titel genannte Methode ist ein Iterationsverfahren, nach dem beim ersten Schritt das linearisierte, d. h. elastische Randwertproblem gelöst wird. Sodann werden diese Lösungen in die nichtlinearen Terme der vollständigen Gleichungen eingeführt, die zusammen mit der ursprünglichen Belastung die neue Belastung bilden. Für diese wird nun die zweite Näherungslösung des elastischen Randwertproblems aufgestellt, usw. In der vorliegenden Arbeit wird die Konvergenz dieser Methode am Beispiel einer unendlich langen kreiszylindrischen Schale mit rotationssymmetrischem Außendruck untersucht. Zahlenrechnungen, die nicht vorgeführt werden, sollen eine rasche Konvergenz dieser Methode zeigen.

A. Kromm.

Klotter, K.: *Die Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Axialkraft bei beliebigen Randbedingungen*. Ingenieur-Arch. 18, 363—369 (1950).

Verf. gibt zunächst eine Übersicht über die bekannten Bedingungen der dynamischen Instabilität beim beiderseits gelenkig gelagerten Stab. Die wichtigsten Bereiche der Instabilität bei kleinen Schwankungsamplituden der pulsierenden Axialkraft werden anschließend durch Kurven dargestellt. Bei anderen Endbedingungen läßt sich die Eigenfunktion des Stabes nicht mehr von der Zeitfunktion separieren. Verf. wählt daher die Auslenkung in Form einer Summe über Glieder

$$y_m(x, t) = A_m T_m^{(1)} \cos \kappa_m x + B_m T_m^{(2)} \sin \kappa_m x + C_m T_m^{(3)} \cos \kappa_m x + D_m T_m^{(4)} \sin \kappa_m x,$$

wobei $\kappa_m l$ einer Frequenzgleichung genügen soll, die der m -ten Eigenfunktion des Stabes mit beliebig vorgegebenen Bedingungen an seinen Enden $x = 0, l$ zugeordnet ist. Die Beiwerte A_m, B_m, \dots könnten durch Erfüllung dieser Bedingungen an einzelnen Zeitpunkten näherungsweise bestimmt werden. Ohne dies wirklich zu tun, zeigt Verf., daß die Zeitfunktionen $T_m^{(1)}, T_m^{(2)}$ einerseits, $T_m^{(3)}, T_m^{(4)}$ andererseits Mathieugleichungen von zweierlei Art genügen müssen. Die Forderung nach der Beschränktheit der Gesamtauslenkung, somit auch eines jeden Einzelgliedes im Ausdruck, führt dann auf die eingangs diskutierten Instabilitätsbereiche. Diese sind nur noch durch Bereiche zu ergänzen, die dem zweiten Gleichungstyp entsprechen. Ref. konnte sich allerdings nicht überzeugen, daß der angenommene einfache Zusammenhang zwischen gewissen Parametern in den gewonnenen Mathieugleichungen und den Knicklasten des Stabes wirklich besteht. Auch führt die Anwendung anderer Methoden, z. B. der Galerkinschen, zu wesentlich anders lautenden Ergebnissen bei dem vorliegenden Problem.

S. Woinowsky-Krieger.

Volterra, Enrico: *Vibrations of elastic systems having hereditary characteristics*. J. appl. Mech. 17, 363—371 (1950).

Verf. gibt zunächst eine Übersicht der Theorie der elastischen Nachwirkung für Stoffe mit hereditärer Charakteristik. Für diese lautet bekanntlich die Relation zwischen der Spannung σ und der Deformation ε zur Zeit t $\sigma = E \varepsilon + \int_0^t \varphi(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau$, wo E den Elastizitätsmodul und $\varphi(t)$ die Erinnerungsfunktion bezeichnet. Verf. diskutiert anschließend die zugehörige Integro-Differentialgleichung der gedämpften Schwingungen, die in erster Näherung auf Schwingungen mit viscoser Dämpfung führt. Durch Analyse einiger englischer Stoßversuche mit dem „Polythene“-Kunststoff gelangt Verf. zu einem Exponentialausdruck für die betreffende Funktion $\varphi(t)$, deren Kenntnis eine direkte Berechnung der Spannungs-Deformations-Kurven für verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten ermöglicht. Zum Schluß werden freie und erzwungene Querschwingungen eines Balkens unter Einführung einer Erinnerungsfunktion von experimentell gewonnener Form behandelt.

S. Woinowsky-Krieger.

Hydrodynamik:

● Binder, R.: *Fluid mechanics*. 2. ed. New York: Prentice-Hall 1949. 361 p. \$ 5,65.

Das Buch stellt eine gute elementare Einführung in die physikalischen Grundlagen der Mechanik der Flüssigkeiten dar, die keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt. Nach sechs einleitenden Abschnitten über Eigenschaften, Statik und Strömungskinetik der Flüssigkeit, über

Energiegleichung, Zähigkeit und Dimensionsanalysis folgen Kapitel über die inkompressible Strömung in Rohren, Meßinstrumente und Kräfte, an die sich Sonderabschnitte anschließen über Dynamik der kompressiblen Strömung, Strömung in Rohren und Gerinnen, Schmierung und hydraulische Maschinen und Steuerorgane. Den einzelnen Abschnitten sind Literaturangaben zur Vertiefung beigelegt, die sich in erster Linie auf die amerikanischen Veröffentlichungen beziehen, sowie Übungsaufgaben (mit Lösungen), die dem Anfänger keine Schwierigkeiten bereiten können.

Joachim Pretsch.

Ghosh, N. L.: Spheroidal configuration under the law of density $\rho = \rho_0(1 - \alpha r^2 - \beta z^2)$. Bull. Calcutta math. Soc. 42, 101—117 (1950).

Dive hat (1930) die Existenz von stationären rotationssymmetrischen Strömungen gezeigt, bei denen eine heterogene Flüssigkeit nicht wie ein starrer Körper rotiert, sondern die Flüssigkeitsteilchen um die z -Achse mit verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten rotieren, und bei denen die Dichte an ähnlichen Ellipsoiden geschichtet ist, aber verschieden von den (ebenfalls ellipsoidischen) Flächen gleichen Druckes. Verf. stellt nun eine solche Konfiguration wirklich explizit auf.

Ernst Hölder.

Storchi, Adoardo: Integrazione delle equazioni indefinite della statica dei sistemi continui su una superficie di rotazione. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 7, 227—231 (1950).

Lösungen der Differentialgleichungen des Gleichgewichts eines zweidimensionalen mechanischen Kontinuums werden im Falle, daß dieses Rotationssymmetrie besitzt, durch eine Verallgemeinerung $\chi(x, y)$ der Airyschen Spannungsfunktion gegeben. Auf die letztere kommt man, wenn die Gaußsche Krümmung der Rotationsfläche verschwindet. Ist sie konstant, so drücken sich die 3 Komponenten des Spannungstensors linear und homogen durch χ und seine 1. und 2. Ableitungen aus. Auch im allgemeinsten Fall gibt Verf. die Lösungen in integralfreier Form durch eine weitere Hilfsfunktion und ihre Ableitungen bis zur 3. Ordnung.

Ernst Hölder.

Kármán, Théodore de: Accelerated flow of an incompressible fluid with wake formation. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 29, 247—249 (1949).

Verf. wendet die Methode von Levi-Civita (zur Behandlung von stationären Strömungen mit freien Totwassergrenzen) auf eine beschleunigte ebene Strömung an: um eine ebene Platte der Länge $2h$, zu der die Anströmgeschwindigkeit $U(t)$ im Unendlichen senkrecht steht; die Beschleunigung dort ist $dU(t)/dt = a(t)$. Er sucht einen als Funktion der Zeit t zu sich selbst ähnlichen Strömungszustand, bei dem die Geschwindigkeit an jedem Punkt nur mit einem Zeitfaktor multipliziert wird und dessen komplexes Potential von der Form $F(z) = U(t)f(z)$, $z = x + iy$ ist, und es gelingt ihm, eben durch konforme Abbildung der oberen f -Halbebene auf den Einheitskreis einer ζ -Hilfebene, die Geschwindigkeit $w = u - vi = F'(z)$ explizit durch f selbst so auszudrücken, daß die Bedingungen an der Symmetrielinie des Strömungsfeldes im Unendlichen und an der Platte erfüllt sind. Die noch bleibende Bedingung an der (unbekannten) freien Totwassergrenze, die Symmetriebedingung für das Totwasser, das sich im Endlichen schließen soll, sowie die Bedingung, daß die Spannweite der Platte h betragen soll, geben — in drei bewundernswerten Schritten — für die charakteristische dimensionslose „Frondesche Zahl“ $U^2/ah = 0,592$, also einen ganz bestimmten Wert und damit auch einen durch die Anfangsgeschwindigkeit U_0 bestimmten zeitlichen Verlauf der Anströmgeschwindigkeit $U(t)$. Was den allgemeinen Fall beliebiger Frondescher Zahlen betrifft, so vermutet Verf., daß dieser Strömungsverlauf mit geschlossener Form des Totwassers der einzige ist, der mit der Zeit unveränderlich ist; er sagt „I should be gratified if some younger scholar of mathematical hydrodynamics would complete these investigations for the general case“.

Ernst Hölder.

Ballabh, Ram: On coincidence of vortex and stream lines in ideal liquids. Ganita 1, 1—4 (1950).

Für eine ideale Flüssigkeit wird gezeigt, daß höchstens im stationären Fall Bahnlinien und Wirbellinien zusammenfallen können.

H. Söngén.

Goldstein, S. and M. J. Lighthill: A note on the hodograph transformation for the two-dimensional vortex flow of an incompressible fluid. Quart. J. Mech. appl. Math. 3, 297—302 (1950).

Am „warnenden“ Beispiel der idealen inkompressiblen Strömung um einen Kreiszylinder wird gezeigt, daß bei der Anwendung der Hodographentransformation

auf eine zweidimensionale wirbelbehaftete Strömung Grenzlinien auftreten. Die Hodographenebene erweist sich als sechsblättrige Riemannsche Fläche, bei der je zwei Blätter aus dem doppelt bedeckten Bereich innerhalb zweier bzw. dreier Rückkehranten in verschiedenen Halbebenen und die anderen beiden Blätter aus der verschiedenartig geschlitzten Gesamtebene gebildet werden. *Joachim Pretsch.*

Heinrich, G.: Zur Theorie der stationären, reibungsfreien Wirbelströmung. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anz. 1950 (87), 76—84 (1950).

Bei der Strömung einer reibungslosen homogenen Flüssigkeit [$\rho = \rho(p)$; ρ Dichte, p Druck] ist der Energiedichtegradient gleich dem Vektorprodukt aus Geschwindigkeits- und Wirbelvektor. Das Feld dieses (vom Verf. als Translator bezeichneten) Vektorproduktes ist, falls die Strömung stationär ist und unter dem Einfluß konservativer Kräfte steht, wirbelfrei. Hieraus folgte sofort der Thomson'sche Satz von der Konstanz der Zirkulation längs einer geschlossenen Kurve. Es folgen noch Erweiterungen auf inhomogene Flüssigkeiten und auf das Vorhandensein von Wärmequellen. *Karl Maruhn.*

Harrington, R. Paul and Paul A. Libby: The shear flow of a perfect fluid about a circular cylinder near a rectilinear boundary. Reissner Annivers. Vol., Contr. appl. Mech. 37—42 (1949).

In der Ebene werde ein Kreis parallel zu einer Wand von einer Scherströmung mit konstantem Geschwindigkeitsgradienten angeströmt. Die resultierende Strömung kann in diesem Fall in die Anströmung und eine Potentialströmung als Korrektur zerlegt werden. Durch Übergang zu Bipolar-Koordinaten wird dann durch einen Ansatz in getrennten Veränderlichen eine Lösung in Reihenform gewonnen, deren Konvergenzgüte nicht untersucht wird. *H. Söhngen.*

Lahaye, Edm.: Une propriété générale du tourbillon dans le mouvement permanent d'un fluide parfait. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Ser. 36, 911—931 (1950).

Verf. betrachtet die stationäre adiabatische Bewegung einer reibungslosen kompressiblen Flüssigkeit unter Einwirkung konservativer Kräfte, die von einer einfach zusammenhängenden singularitätenfreien, nichtzylindrischen Fläche S begrenzt ist; die Geschwindigkeit in den Punkten von S definiert die Bewegung. Ausgehend von den Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen wird gezeigt, daß zwischen Wirbel- und Geschwindigkeitskomponenten innerhalb der Flüssigkeit die Beziehungen $\xi = k \rho u$, $\eta = k \rho v$, $\zeta = k \rho w$ (ρ die Dichte, k in der ganzen Flüssigkeit konstant) bestehen. Handelt es sich ferner bei S um eine Zylinderfläche, so ist im allgemeinen die Bewegung wirbelfrei. Es existieren indessen überdies spezielle Bewegungen, bei denen der (nicht verschwindende) Wirbelvektor parallel zu den Erzeugenden von S gerichtet ist; in diesem Fall können aber die Geschwindigkeitskomponenten nicht beliebig auf S vorgegeben werden. *Karl Maruhn.*

Dungen, F. H. van den et Edm. Lahaye: Sur le mouvement permanent relatif d'un fluide parfait. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 36, 992—998 (1950).

Betrachtet wird die durch eine gleichförmige Rotation (Komponenten $\omega_x, \omega_y, \omega_z$) hervorgerufene stationäre adiabatische Bewegung einer in eine (nichtzylindrische) einfach zusammenhängende singularitätenfreie Fläche eingeschlossenen Flüssigkeit unter Einwirkung konservativer Kräfte. Es wird gezeigt, daß zwischen den Wirbel- und Geschwindigkeitskomponenten die Beziehungen $\xi = -2 \omega_x + K \rho u$, $\eta = -2 \omega_y + K \rho v$, $\zeta = -2 \omega_z + K \rho w$ (ρ Dichte, K in der ganzen Flüssigkeit konstant) gelten. Außerdem existieren noch gewisse ebene Bewegungen normal zur Rotationsachse. *Karl Maruhn.*

Meksyn, D.: The laminar boundary-layer equations. I. Motion of an elliptic and circular cylinders. II. Integration of nonlinear ordinary differential equations. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 192, 545—567, 567—575 (1948).

I. Verf. leitet zunächst für die stationäre Bewegung in der laminaren Grenz-

schicht längs einer gegebenen Kontur bei bekannter zugehöriger reibungsloser Strömung eine Integro-Differentialgleichung her, die aus der Grenzschichtgleichung unter weniger Vernachlässigungen als bisher üblich entsteht (Mitnahme von Gliedern der beiden höchsten Größenordnungen bez. der Reynoldsschen Zahl). Die von Falkner und Skan (1930) behandelte und von Hartree (1937) numerisch gelöste Gleichung $f''' + ff'' = \lambda(1 - f'^2)$ (λ charakterisiert einen festen Konturpunkt) stellt die Hauptglieder in der genannten allgemeineren Gleichung dar. Verf. wendet die Hartreesche Lösung auf vermessene Zylinder [elliptischer Zylinder von Schubauer (1935), Kreiszyylinder von Fage und Falkner (1931)] an und stellt bis auf eine kleine Umgebung des Ablösungspunktes befriedigende Übereinstimmung mit den Messungen fest. Zur Bestimmung des Ablösungspunktes wird die allgemeinere Gleichung (nach Streichung einiger Terme) benutzt. Berechnung der Druckverteilung.

II. Mathematische Details zu Teil I. Zunächst wird die vereinfachte Gleichung $f''' + ff'' = \lambda(1 - f'^2)$ betrachtet und zur Herstellung einer Lösung mit $f(0) = f'(0) = f''(\infty) = 0$, $f'(\infty) = 1$ und einer weiteren asymptotischen Eigenschaft für $x \rightarrow \infty$ ein Verfahren sukzessiver Näherungen angegeben. Die Überlegungen werden getrennt für $\lambda < 0$ (Staupunkt bis zu einem Punkt kurz vor der Ablösung und nur $0 < \lambda < 0,2$ (bis zur Ablösung) durchgeführt. Es folgt eine angenäherte Bestimmung von λ aus den Bedingungen $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ (Ablösungspunkt). Alle Betrachtungen werden ohne Konvergenzuntersuchungen durchgeführt. Die dann noch behandelte allgemeinere Gleichung hat die Gestalt $f''' + ff'' = \lambda(1 - f'^2) +$

$\varepsilon \left\{ a f'' + \int_{\infty}^x (b f f'' + c x f' f'') dx \right\}$ (ε, a, b, c bekannte Parameter; $|\varepsilon|$ klein); sie liefert mittels eines geeigneten Näherungsverfahrens eine bessere Bestimmung des Ablösungspunktes.

Karl Maruhn.

Halbronn, Georges: Application de la théorie de la couche limite à l'étude de l'écoulement sur un barrage-déversoir. I, II. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 929—930, 975—977 (1949).

• Courant, R. and K. O. Friedrichs: Supersonic flow and shock waves. (Pure and applied mathematics. Vol. I.) New York: Interscience Publ., Inc. 1948. XVI, 464 pp. \$ 7,50.

Das Buch ist aus einem 1944 für den Dienstgebrauch des „Office of Scientific Research and Development“ herausgegebenen Forschungsbericht erwachsen. Es wendet sich in gleicher Weise an den Mathematiker, Physiker und Ingenieur, mit dem Ziele, ihnen eine so weit wie möglich systematische Einführung in das weite Gebiet der Gasdynamik, d. h. der Strömungslehre kompressibler Medien, zu geben. Für den Mathematiker bedeutet die Gasdynamik ein besonders umfassendes und interessantes Anwendungsgebiet der quasilinearen partiellen Differentialgleichungen. Grundsätzlich werden in dem Buch nur hyperbolische Probleme behandelt; dadurch ist das Buch als Ganzes von einer faszinierenden Einheitlichkeit, naturgemäß freilich auf Kosten der Vollständigkeit, da das ganze Gebiet der stationären Unterschallströmungen ausgeschlossen bleiben muß. — In Kap. I werden die erforderlichen aerodynamischen und thermodynamischen Grundsätze zusammengestellt und die Differentialgleichungen für stationäre sowie für eindimensionale, sphärische und zylindrische nichtstationäre Gasströmungen hergeleitet. In einem Anhang wird kurz auf die „Wasseranalogie“ (Oberflächenwellen in seichten Gewässern) hingewiesen, die auf den Franzosen Jouguet zurückgeht und neuerdings vor allem durch Arbeiten von J. J. Stoker als „shallow water“-Theorie zu großer Bedeutung gelangt ist. — Kap. II enthält das wichtigste mathematische Rüstzeug, nämlich die Charakteristikentheorie für Systeme quasilinearer Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus bei zwei unabhängigen Veränderlichen. Dabei werden die in der Gasdynamik gebräuchlichen Differenzverfahren auf eine solidere mathematische Grundlage gestellt; der in dem Buch skizzierte Gedankengang ist in einer mittlerweile erschienenen Abhandlung von R. Courant und P. Lax (dies. Zbl. 34, 201) streng durchgearbeitet worden. Das Anfangswertproblem wird eingehend besprochen, ferner wird auf die „Grenzlinsen“ (= Hüllkurven von Charakteristiken) und ausführlich auf die Abbildung der physikalischen Ebene auf die Hodographenebene eingegangen. Ein paar kurze Bemerkungen über die Charakteristikentheorie bei mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen folgen als Anhang. — Kap. III über die eindimensionale nichtstationäre Strömung und Kap. IV über die ebene stationäre wirbelfreie und daher isentropische Strömung bilden den Schwerpunkt des Buches. In Kap. III werden zunächst die einseitigen isentropischen Verdünnungs- und Ver-

dichtungswellen behandelt, dann sehr eingehend die Stoßwellen (strenge Theorie und Näherungen für schwache Stöße, Reflexion, Abklingen, Sägezahnstoß usw.), ferner das Durchkreuzen von Wellen und schließlich die Probleme der Detonation und Verbrennung; als Anhang ist einiges über Wellenausbreitung in elastisch-plastischem Material hinzugefügt. Kap. IV beginnt mit der Tschapliginschen Hodrographenmethode, wendet sich dann zu den Strömungen mit geradlinigen Charakteristiken (Meyersche Eckenströmung, Strömung längs einer gegebenen Wand usw.), worauf eine sehr ausführliche Darstellung der schiefen Stöße und stationärer Stoßkonfigurationen (Machsches Y) folgt samt Anwendungen auf Tragflügelprobleme. Mit grundsätzlichen Bemerkungen zur Problematik des Randwertproblems der stationären Strömung schließt das Kapitel. — Kap. V behandelt als Anwendung des vorausgegangenen Kapitels die Düsenströmung und den Freistrahle. Im Schlußkapitel VI wird kurz auf die einfachsten dreidimensionalen Probleme eingegangen (Karmansche Methode für die achsensymmetrische Überschallströmung um Drehkörper, Methode von Busemann und Taylor für die konische Strömung, sphärische Wellen). — Die klassische Klarheit der Darstellung, in der mathematische Strenge und physikalisch-anschauliche Interpretation in glücklichster Weise verbunden sind, macht das Buch zu einem Meisterwerk der angewandten Mathematik. Sehr wertvoll ist das ausführliche und übersichtliche Literaturverzeichnis. — Bezüglich des Stoffes überdeckt sich das Buch naturgemäß weitgehend mit den beiden Büchern des Ref. über Gasdynamik (Einf. in die theort. Gasdynamik, 2. Aufl., Berlin 1951; Écoulements des fluides compressibles, Paris 1951; dies. Zbl. 42, 195), jedoch richten sich diese Bücher, von denen das erste ausschließlich stationäre, das zweite auch nichtstationäre Fragen behandelt, mehr an den Ingenieur als an den Mathematiker.

Robert Sauer.

● Kuehse, A. M. and J. D. Schetzer: *Foundations of aerodynamics*. New York: John Wiley and Sons, Inc.; London: Chapman and Hall, Ltd., 1950. IX, 374 p. 46 s. net.

● *Handbook of supersonic aerodynamics*. (U.S. Navy, Bureau of Ordnance, NavOrd Report 1488.) — Vol. 1 and 2. Washington: U.S. Government Printing Office 1950. IV, 400 p., 1 plate; III, 197 p. \$ 1,75.

Ursell, F. and G. N. Ward: On some general theorems in the linearized theory of compressible flow. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 3, 326—348 (1950).

Mit Hilfe der linearisierten Bewegungsgleichungen für drehungsfreie adiabatische Strömung hinter einem dünnen Körper mit scharfer Hinterkante werden unter der Voraussetzung, daß die Zähigkeit nur durch die Kutta-Joukowski-Bedingung eingeht und Stöße vernachlässigt werden können, Auftrieb und Widerstand berechnet. Eine Beziehung zwischen Strömung und Umkehrströmung, bei der die Rollen von Vorder- und Hinterkante vertauscht sind, gestattet mit Vorteil, den Auftrieb eines Deltaflügels mit Überschallkanten in Unterschallströmung aus der Umkehrströmung zu berechnen.

Joachim Pretsch.

Grimminger, G., E. P. Williams and G. B. W. Young: *Lift on inclined bodies of revolution in hypersonic flow*. *J. aeronaut. Sci.* 17, 675—690 (1950).

Da bei gelenkten Geschossen der Auftrieb des Körpers eine nicht unwesentliche Rolle spielt, wird von der Newtonschen Korpuskular-Theorie ausgehend eine Näherungsmethode zur Berechnung des Auftriebes im Hyperschallgebiet ($M_0 > 5$) entwickelt. Der Einfluß der Zentrifugalkräfte wird dabei abgeschätzt.

H. Söhngen.

Cöburn, N. and C. L. Dolph: *The method of characteristics in the three-dimensional stationary supersonic flow of a compressible gas*. *Proc. Sympos. appl. Math.*, Nr. 1 (Brown Univ. 2.—4. 8. 1947. Non linear problems in mechanics of continua), 55—66 (1949).

Verff. behandeln dreidimensionale stationäre isentropische Überschallströmungen eines Gases. Während für zweidimensionale stationäre Überschallströmungen nach der alten, von H. Lewy zur vollen Wirkung des Existenzbeweises gebrachten Charakteristiken-Methode manche Probleme behandelt werden konnten, stützen sich Verff. bei ihrem dreidimensionalen Problem auf eine grundlegende Untersuchung von E. W. Titt (dies. Zbl. 24, 401), deren Bedeutung für die Gasdynamik, wie Verff. bemerken, übersehen worden ist. (Auch Ref. hat sich diese Arbeit erst jetzt zu diesem Referat verschaffen und lediglich einen groben Überblick über die neuartige, teilweise im analytischen Gebiet arbeitende Kombination von sukzessiven Approximationen und Majorantenmethoden gewinnen können.) Nach der Einleitung, Nr. 1, bringt

Nr. 2 wichtige Feststellungen über die Geometrie der Überschallgasströmungen, deren Geschwindigkeitsfeld v^λ den Differentialgleichungen (1) $a^{\lambda\mu} \Gamma_\lambda v_\mu = 0$ mit $a^{\lambda\mu} = v^\lambda v^\mu - c^2 g^{\lambda\mu}$, $g^{\lambda\mu}$ Euklidischer Maßtensor, genügt: daß die Projektion des Geschwindigkeitsvektors v^λ (vom Betrag q) auf den Einheitsvektor i^λ der Normalen des charakteristischen Kegels gleich der lokalen Schallgeschwindigkeit c ist: $v^\lambda i_\lambda = c$, daß der Einheitsvektor t^λ der Richtung der Bicharakteristiken oder „Strahlen“ auf einer charakteristischen Fläche einen Kegel bilden, dessen Achse der Geschwindigkeitsvektor ist. Der Normalenkegel ist $a^{\lambda\mu} i_\lambda i_\mu = 0$ (i). (Diese Feststellungen gehen z. T. über die von Hadamard, Propagation des ondes, Paris, gemachten hinaus, sind aber den Hörern der Göttinger Vorlesung von G. Herglotz über Mechanik der Continua im wesentlichen bekannt. Anm. des Ref.) — Der neue Gedanke der Verff. ist es, ein natürliches Koordinaten-System einzuführen: auf einer willkürlichen Anfangsfläche S seien die Anfangswerte des Geschwindigkeitsvektors gegeben. Auf S wird eine einparametrische Kurvenschar mit dem Einheitstangentenvektor l^λ so angenommen, daß die Normalebene zu l^λ den Normalenkegel (i) in zwei verschiedenen Richtungen schneidet. Wir erhalten so zwei Scharen von Anfangsstreifen, durch die vermittels der Lösung des Cauchyschen Problems einer partiellen Differential-Gleichung 1. Ordnung zwei Scharen von charakteristischen Flächen durch den Strömungsraum bestimmt werden. Die Schnitte einer charakteristischen Fläche $\alpha = \text{const.}$ mit dem Normaleneinheitsvektor i^λ und einer charakteristischen Fläche $\beta = \text{const.}$ mit dem Normaleneinheitsvektor i'^λ bilden eine Kurvenkongruenz im Raum mit dem Tangenteneinheitsvektor l^λ . Neben l^λ hat man noch die Einheitsvektoren t^λ , t'^λ der Bicharakteristiken auf den charakteristischen Flächen der beiden Scharen. Nach dem Dreiein dieser Einheitsvektoren t^λ , t'^λ , l^λ werden nun zunächst die Vektoren i^λ , i'^λ , v^λ in Komponenten zerlegt; mit den Abkürzungen $a = \cos \psi = l^\lambda t_\lambda$, $b = \cos \psi' = l'^\lambda t'_\lambda$, $d = \cos \Phi = t^\lambda t'_\lambda$ erhält man die Winkelrelationen $\psi = \psi'$ und $1 - a^2 = \sin^2 \psi = (1 - \cos \Phi) c^2 / [2c^2 - (q^2 - c^2) (1 - \cos \Phi)]$ sowie z. B.

$$v^\lambda = \frac{c^2}{(1-d)(q^2-c^2)^{1/2}} (t^\lambda + t'^\lambda) - \frac{a c^2}{(1-a^2)(q^2-c^2)^{1/2}} l^\lambda.$$

Schließlich werden die Grundgleichungen (1) so umgeschrieben, daß die Richtungsableitungen nach t^λ , t'^λ , l^λ verwendet werden, man erhält so „charakteristische Gleichungen 2. Art“ von der Form

$$\left[\frac{c^2}{1-d} (t^\lambda - t'^\lambda) + (q^2 - c^2)^{1/2} v^\lambda \right] t^\alpha \Gamma_\alpha v_\lambda + \frac{c^2}{a^2 - 1} (l^\lambda - a t^\lambda) l^\alpha \Gamma_\alpha v_\lambda = 0$$

$$\left[\frac{c^2}{1-d} (t^\lambda - t'^\lambda) + (q^2 - c^2)^{1/2} v^\lambda \right] t'^\alpha \Gamma_\alpha v_\lambda + \frac{c^2}{a'^2 - 1} (l'^\lambda - a' t'^\lambda) l'^\alpha \Gamma_\alpha v_\lambda = 0.$$

In Nr. 3 werden die Kongruenzen t^λ , t'^λ , l^λ als Koordinatenlinien α , β , γ benutzt und mittels des Linielementes

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2 + C^2 d\gamma^2 + 2E d\alpha d\beta + 2F d\alpha d\gamma + 2G d\beta d\gamma$$

das System der acht nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für die sechs gesuchten Funktionen x^λ , v^λ ($\lambda = 1, 2, 3$) von α , β , γ aufgestellt, die den Differentialgleichungen von Titt entsprechen:

$$v^\lambda = \frac{c^2}{(A B - C^2) (q^2 - c^2)^{1/2}} \left[A \frac{\partial x^\lambda}{\partial \beta} + B \frac{\partial x^\lambda}{\partial \alpha} \right] - \frac{c^2 B G}{(B^2 C^2 - G^2) (q^2 - c^2)^{1/2}} \frac{\partial x_\lambda}{\partial \gamma} \quad (\lambda = 1, 2, 3)$$

$$\frac{1}{B} \left[\frac{c^2 A B}{A B - E} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \beta} \right) + (q^2 - c^2)^{1/2} v^\lambda \right] \frac{\partial v_\lambda}{\partial \beta}$$

$$+ \frac{c^2 B^2 C}{G^2 - B^2 C^2} \left[\frac{1}{C} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \gamma} - \frac{G}{B^2 C} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \beta} \right] \frac{\partial v_\lambda}{\partial \gamma} = 0, \dots$$

(entsprechend mit $\frac{\partial v_\lambda}{\partial \alpha}$) sowie $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \alpha} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \beta} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \beta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \alpha}$ und die beiden durch zyklische Vertauschung

von α , β , γ entstehenden Gleichungen. Dabei ist natürlich $q^2 = v^\lambda v_\lambda$ und $q^2 + (2/(\gamma - 1)) c^2 = q^2 = \text{const.}$ vermöge der Bernoullischen Gleichung. Das System ist verträglich, liefert hinreichende Bedingungen zur Bestimmung einer Lösung und dürfte voraussichtlich auch zur Berechnung mittels endlicher Differenzen verwertet werden können. — Nr. 4 bringt allgemeine Betrachtungen der zweidimensionalen Strömungen mit $\psi = \pi/2$, für die sich die Gleichungen beträchtlich vereinfachen. Es wird insbesondere gezeigt, was die erhaltenen Ergebnisse im bekannten Fall einer ebenen Strömung bedeuten. Zum Schluß werden Integralinvarianten des Systems der Bicharakteristiken aufgestellt.

Ernst Hölder.

Iacob, Caius: Théorie de l'aile angulaire aux vitesses supersoniques. An. Acad. Republ. Popul. Române, Ser. Mat. Fiz. Chim. 3, 349—369, russische und französ. Zusammenfassgn. 370—371, 372—373 (1950) [Rumänisch].

Betz, A. und E. Krahn: Berechnung von Unterschallströmungen kompressibler Flüssigkeiten und Profile. Ingenieur-Arch. 17, 403—417 (1949).

Als Grundlage zur Berechnung der adiabatischen Potentialströmung um ein Tragflügelprofil dienen die Differentialgleichungen (1) $\operatorname{div} \varrho w = 0$, $\operatorname{rot} w = 0$ sowie die bekannte aus der Bernoullischen Gleichung und dem Adiabatengesetz folgende Beziehung zwischen ϱ und $w = |w|$ die Größe der Zirkulation wird wie bei der inkompressiblen Strömung durch die Forderung glatte Abschlusses an der Hinterkante festgelegt. Verff. behandeln dieses Problem mit der Methode der sukzessiven Approximationen und machen für die Ausgangsnäherung den Ansatz (2) $w_1 = \mathfrak{B} \sqrt{\varrho_\infty / \varrho}$, wo \mathfrak{B} die Lösung des entsprechenden inkompressiblen Umströmungsproblems mit gleicher Anströmungsgeschwindigkeit bedeutet. Dieser Ansatz ist, wie ein Vergleich mit der von E. Lamla berechneten vierten Näherung für die Tangentialgeschwindigkeit am Kreiszylinder zeigt, wesentlich besser als die naheliegenden Ansätze $w_1 = \mathfrak{B}$ bzw. $w_1 = \mathfrak{B} \varrho_\infty / \varrho$, die jeweils eine der beiden Gleichungen (1) exakt erfüllen. Die zweite Näherung läßt sich dann aus dem Quellen- und Wirbelfeld der ersten durch Integration gewinnen. Beim Kreiszylinder wird diese über das ganze Strömungsgebiet zu erstreckende Integration mit Hilfe passender Reihenentwicklungen ausgeführt, bei Ellipsen und Tragflügelprofilen wird sie auf die Auswertung eines komplexen Kurvenintegrals zurückgeführt, das über die Profilkontur zu erstrecken ist. Um die ziemlich umständliche Rechnung für die zweite Näherung zu ersparen, wird eine durch Probieren gefundene Korrekturformel angegeben, die mit der zweiten Näherung für die Geschwindigkeit an elliptischen Zylindern mit verschiedenem Dickenverhältnis sowie an einigen NACA-Profilen mit und ohne Zirkulation gut übereinstimmt. *Hans Schubert.*

Lin, C. C.: On the subsonic flow through circular and straight lattices of airfoils. J. Math. Physics 28, 117—130 (1949).

Yuan, S. W. and M. Morduechow: On the stability of the transient motion of helicopter blades in flapping and lagging. Reissner Annivers. Vol., Contr. appl. Mech. 163—181 (1949).

Es wird ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Stabilität der Rotorblätter eines Hubschraubers entwickelt. Als Freiheitsgrade werden dabei die durch die übliche Aufhängung bedingten angesehen. Das Blatt wird starr angenommen, die Luftkräfte quasistationär angesetzt. Man erhält dann zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung, deren Koeffizienten infolge der Umlauf- und Vorwärtsbewegung periodische Funktionen sind. Dieses System wird näherungsweise gelöst, daß das Umlaufintervall in zwei gleich große Teile zerlegt wird, in denen die Koeffizienten durch ihre Mittelwerte ersetzt werden. Die sich so ergebenden zwei Systeme können näherungsweise explizit gelöst werden, da die Koppelung in jedem schwach ist. An der Übergangsstelle wird Stetigkeit sowohl für die beiden Freiheitsgrade als auch deren Ableitungen verlangt. Weiter wird ohne jede Begründung angenommen, daß nach einem vollen Umlauf sich sowohl die beiden Freiheitsgrade als auch deren Geschwindigkeiten um denselben konstanten Faktor σ geändert haben. Beide Bedingungen zusammen führen auf ein homogenes Gleichungssystem mit 8 Unbekannten. Die verschwindende Koeffizientendeterminante liefert dann die Bestimmungsgleichung für die Stabilitätskonstante. *H. Söhngen.*

Goland, Martin: The quasisteady air forces for use in low-frequency stability calculations. J. aeronaut. Sci. 17, 601—608 and 672 (1950).

Es hat sich gezeigt, daß bei Stabilitätsrechnungen von Flugzeugen die meistens benutzten quasistationären Luftkräfte (Vernachlässigung der freien stationären Wirbelschleppe) insbesondere für kleine reduzierte Frequenzen zu Fehlurteilen führen können, da in diesem Gebiet die freien Wirbel einen Luftkraftanteil induzieren, der unter Umständen schon bei einem Freiheitsgrad anfachend sein kann. Da aber eine Stabilitätsrechnung mit instationären Luftkräften zu umfangreich ist, so schlägt Verf. eine geeignete Abänderung der quasistat. Luftkräfte vor und zeigt an Schaubildern, daß man damit bei mäßigem Rechenaufwand zu Ergebnissen gelangt, die mit denjenigen der exakten Theorie gut übereinstimmen. *H. Söhngen.*

Lieber, Paul and M. E. Hamilton: On the dynamics of aircraft structures. Reissner Annivers. Vol., Contr. appl. Mech. 125—142 (1949).

Es wird eine zweidimensionale Methode zur Berechnung der Durchbiegungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen eines Tragflügels für den Fall einer Dreipunktlandung entwickelt. Diese Vereinfachung wird dadurch erreicht, daß

nur die sog. Standschwingungsformen als Bewegungsformen zugelassen werden. Ganz ähnlich, wie es von den Flatterrechnungen her seit langem bekannt ist, kann man sich dann ein ebenes Ersatzmodell beschaffen.

H. Söhngen.

Miles, John W.: On the equations of longitudinal stability. I. *J. aeronaut. Sci.* **17**, 815—816 (1950).

Miles, John W.: Some relations between harmonic and transient loading of airfoils. *J. aeronaut. Sci.* **17**, 671—672 (1950).

Meyerhoff, Leonhard: An extension of the theory of the one-dimensional shock-wave structure. *J. aeronaut. Sci.* **17**, 775—786 (1950).

Untersucht wird die stetige Änderung der Strömungsgrößen innerhalb des schmalen Streifens, den man als Stoß bezeichnet (10^{-5} cm). Das Problem führt auf eine nicht-lineare Differentialgleichung, deren Koeffizienten Funktionen der Gaseigenschaften (c_p , c_v , μ , p_0 , u_0 , ...) sind. Sieht man diese als konstant an, so lassen numerisch und mittels Integrieranlagen gewonnene Ergebnisse vermuten, daß unendlich viele Typen von Stößen existieren. Läßt man die Gaseigenschaften auch noch von der Temperatur abhängen, so wird an einem Beispiel gezeigt, daß das Stoßgebiet sich verbreitert.

H. Söhngen.

Peters, A. S.: The effect of a floating mat on water waves. *Commun. pure appl. Math.* **3**, 319—354 (1950).

Eine auf der freien Oberfläche über tiefem Wasser fortschreitende Welle dringt in eine etwa durch ein Feld von Eisstücken darstellbare dünne Schicht schwimmenden Materials von Kreissektorgrundriß mit dem Öffnungswinkel γ unter gleichzeitiger Änderung der Wellenlänge und Amplitude ein, wenn der Parameter $c = \delta g / (\delta_1 \omega^2 - \delta g) < 0$ ist, wo δ und δ_1 die Dichten des Wassers bzw. schwimmenden Materials, g die Erdbeschleunigung und ω die Kreisfrequenz bezeichnen. Für $c = 0$ hat man das Potentialproblem der Oberflächenwellen über abfallendem Strand, das von Stoker, Lewy, Isaacson behandelt wurde; im Spezialfall $\gamma = \pi$ wird man auf das von Friedrichs und Lewy gelöste Dockproblem geführt. Eine thermodynamische Deutung des Problems ist folgende: eine große Sektorplatte mit wärmeundurchlässigen Stirnseiten und konstanter Scheiteltemperatur strahlt von beiden Kanten mit verschiedenen Emissionsfaktoren in ein Medium der Temperatur Null; die stationäre Zustandstemperatur in der Platte erfüllt dann das Potentialproblem.

Joachim Pretsch.

● **Eck, Bruno:** Technische Strömungslehre. 3. verb. und erweiterte Auflage. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag 1949, X, 398 S. u. 372 Abb. DM 24,—, Ganzleinen DM 27,—.

Bei der dritten Auflage der „Strömungslehre“ (1. Aufl. 1935/36, 2. Aufl. 1944), deren Ziel es ist, die Strömungslehre unmittelbar mit der Praxis in Verbindung zu bringen, ist ein Kapitel über die Bewegung fester Körper in strömenden Medien eingefügt worden. Durch theoretische Überlegungen werden die Grundlagen für die Theorie der pneumatischen Sichtung und Förderung und der Entstaubungstechnik gegeben. Das Kapitel über Schaufeln und Profile wurde so umgearbeitet, daß es besonders die für die Kreiselmachine wichtigen Dinge enthält. Von den weiteren theoretisch gehaltenen Zusätzen ist noch auf einen neuen Abschnitt über Schmiermittelreibung und auf eine Überarbeitung des Abschnitts über die Bewegungsgesetze der Gase und Dämpfe hinzuweisen.

Kurt Schröder.

Wärmelehre:

Stupočenko, E. V.: Über die Verteilung der kinetischen Energie von Teilchen, die durch Quellen in Gassystemen erzeugt werden. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **67**, 447—450 (1949) [Russisch].

Verf. betrachtet die Boltzmann-Gleichung der kinetischen Gas-Theorie im Fall von Quellen (herrührend etwa von chem. Reaktionen) und berechnet die Energieverteilung der „Reaktionsteilchen“ (A). Annahmen u. a.: die „umgebenden“ Teilchen (B) haben Maxwellverteilung (MV), die Wechselwirkung zwischen A und B vom Kastenpotentialtypus. Die Integralgleichung des Problems (stationär) läßt sich nach einem zu verallgemeinernden (zitierten) Satz von Hilbert in eine Dif-

ferentialgleichung mit (unstetigen) Randbedingungen überführen, deren Lösung in gewissem Grenzfall geschlossen hingeschrieben werden kann. Für Energien größer als die der Quellteilchen (Verteilung: $\delta = \text{Funktion!}$) besteht für A reine MV.

Detlof Lyons.

Stupočenko, E. V.: Über die Verteilung der kinetischen Energie in Systemen mit Quellen von Teilchen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **67**, 635—638 (1949) [Russisch].

In Fortsetzung der letzten Arbeit des Verf. (s. vorsteh. Referat) wird die Geschwindigkeits(!)-Verteilung der Teilchen B bestimmt. Im Gegensatz zu der Verteilung der A besteht hier nirgends MV.

Detlof Lyons.

Surinov, Ju. A.: Über gewisse Grundgleichungen des Feldes der Theorie der Wärmestrahlung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **72**, 469—472 (1950) [Russisch].

Es werden allgemeine Differential- und Integralbeziehungen für die Strahlung abgeleitet, in einem abgeschlossenen System, dessen Berandung vorgegebene Werte von Temperatur und optischen Konstanten hat und in dem eine Reihe von grau-strahlenden Körpern, die nicht im thermischen Gleichgewicht sind, sich befinden.

Gerd Burkhardt.

Schrödinger, E.: Irreversibility. Proc. Irish Acad. A **53**, 189—195 (1950).

Es wird gezeigt, daß man alle Feststellungen über die Irreversibilität so formulieren kann, daß sie unter der Transformation der Zeitumkehr $t \rightarrow -t$ invariant bleiben. So lautet für zwei Systeme 1 und 2, welche in einem Zeitintervall $t_A < t < t_B$ getrennt, vor- und nachher aber in Kontakt waren, der Entropiesatz statt in der üblichen Form $(S_{1B} - S_{1A}) (S_{2B} - S_{2A}) \geq 0$. Aus dem Vorzeichen des einzelnen Faktors läßt sich dann die Richtung des Zeitablaufs ermitteln. *Josef Meixner.*

Hove, L. van: Un problème d'intégrations posé par la mécanique statistique. Bull. Soc. math. Belgique **1948—1949**, 49—55 (1949).

Das Konfigurationsintegral der statistischen Mechanik für eine lineare Kette von Teilchen mit einer Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn, die nur von deren Entfernung abhängt

$$Q(n, L_n) = \int_0^{L_n} dx_1 \int_{x_1}^{L_n} dx_2 \dots \int_{x_{n-1}}^{L_n} dx_n \varepsilon(x_1) \prod_{i=2}^n \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \cdot \varepsilon(L_n - x_n)$$

wird untersucht und es wird der Grenzwert von $n^{-1} \log Q(n, L_n)$ für $n \rightarrow \infty$, $L_n \rightarrow l_n$ ($l = \text{fest}$) streng berechnet.

Josef Meixner.

Raševskij, P. K.: Die Bose-Einstein- und die Fermi-Dirac-Statistik vom tensoriellen Standpunkt. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu **7**, 362—380 (1949) [Russisch].

Verf. stellt in naheliegender Weise einen Tensorkalkül für die Vektoren und linearen Operatoren eines Hilbert-Raumes auf und gibt eine kovariante Formulierung der Schrödinger- und der Bewegungsgleichung für Ensembles von N Bose-Einstein- oder Fermi-Dirac-Teilchen an. Einem Zustand wird ein symmetrischer bzw. antisymmetrischer Tensor $x^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N}$ zugeordnet. Verf. betrachtet nur normierbare Zustände und Ensembles ohne Wechselwirkung. Die Arbeit enthält keine neuen Ergebnisse.

Wolfram Urich.

Gejlikman, B. T.: Zur Statistik kondensierter Systeme. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **70**, 25—28 (1950) [Russisch].

Im Anschluß an eine frühere eigene Arbeit (dies. Zbl. **36**, 140) und an die statistische Mechanik von J. Mayer und M. Goeppert-Mayer behandelt Verf. einige Beispiele für diese Theorie der Phasenumwandlungen. Er berechnet die klassische Zustandssumme einschließlich einer größeren Anzahl von SchwarminTEGRALen für folgende vereinfachte Gasmodelle: 1. „harte Kügelchen“, d. h. Teilchen mit einem kugelsymmetrischen Potentialtopf, $U(r) = U_0 > 0$ für $r \leq 2r_0$ und $U(r) = 0$ für $r \geq 2r_0$, insbesondere $U_0 = \infty$; 2. „sich anziehende punktförmige Moleküle“, d. h. $U(r) = -|U_0|$ für $r \leq 2r_0$, $U(r) = 0$ für $r \geq 2r_0$; 3. „sich anziehende, ziemlich harte

Kügelchen“, d. h. Teilchen mit einem gestuften Potentialtopf, $U(r) = U_0 > 0$ für $r \leq 2r_0$, $U = -|U_1|$ für $2r_0 \leq r \leq 2r_1$ und $U = 0$ für $r \geq 2r_1$. Außerdem behandelt er dieselben Fälle auch für analoge kubische Potentialtöpfe der Gasmoleküle. Verf. zeigt, daß ein Phasenübergang 3. Art, der Einsteinschen Kondensation entsprechend, bei Annahme von Anziehungskräften allein, schon bei hohen Temperaturen möglich ist; er zeigt weiter, daß jedoch in den Fällen, in welchen Anziehungs- und Abstoßungskräfte wie in realen Gasen wirken, ein solcher Phasenübergang offenbar bei keiner Temperatur erfolgen kann. *Walter Kofink.*

Gejlikman, B. T.: Zur Statistik von Systemen mit mehreren Komponenten. (Phasenumwandlungen zweiter Art.) Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 69, 631—633 (1949) [Russisch].

Verf. verallgemeinert seine frühere Theorie der Phasenumwandlungen erster Art (dies. Zbl. 36, 140) durch Übergang von Systemen mit einer Komponente auf solche mit mehreren Komponenten. Er benützt dazu einen Ausdruck für die Zustandssumme eines Systems von n Komponenten, den Fuchs [Proc. roy. Soc. London, Ser. A 179, 408 (1942)] abgeleitet hat. Er findet nach einer Reihe von Konvergenzbetrachtungen, daß bei einem kritischen Volumen eine Phasenumwandlung stattfindet, die von einem Sprung der Kompressibilität, der Wärmekapazität, des Ausdehnungskoeffizienten begleitet ist. *Walter Kofink.*

Gürsey, Feza: Classical statistical mechanics of a rectilinear assembly. Proc. Cambridge philos. Soc. 46, 182—194 (1950).

Verf. untersucht, ob die klassische statistische Mechanik für eine geradlinige Gesamtheit harter, kugelförmiger Moleküle mit Anziehungskräften kurzer Reichweite zwischen Nachbarn zu kritischen Erscheinungen führt. Die Rechnung ergibt, daß dieses lineare Modell sich bei hohen Temperaturen wie ein ideales Gas und in der Nähe des absoluten Nullpunkts der Temperatur wie ein Kristall verhält; daß aber dem analytischen Charakter des Zustandsintegrals entsprechend, keine kritischen Erscheinungen vorkommen. Die Isothermen des Modellgases zeigen bei tiefen Temperaturen eine Stelle sehr rascher Neigungsänderung, die man als den Punkt einer Phasenänderung deuten mag. Wenn Verf. die Anziehungskräfte zwischen den Molekülen wegläßt, erhält er die örtliche Moleküldichteverteilung von L. Tonks für starre Moleküle auf einer Geraden. *Walter Kofink.*

Wasastjerna, Jarl A.: Atomic arrangements with given number of neighbours. Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math. 14, Nr. 3, 4 S. (1948).

Auf einer Geraden seien Np Partikel A und Nq Partikel B angeordnet ($p + q = 1$), derart, daß $N\kappa$ Nachbarnpaare AA , $N\lambda = N\mu$ Nachbarnpaare AB und BA , sowie $N\nu$ Paare BB vorkommen. Nach Chang (dies. Zbl. 21, 183) gilt für die Anzahl g der dadurch gekennzeichneten verschiedenen Anordnungen (gleiche Teilchen ununterscheidbar) $g = (Np)!(Nq)!/(N\kappa)!(N\lambda)!(N\mu)!(N\nu)!$. In vorliegender Arbeit wird diese Frage in dem allgemeineren Fall untersucht, daß jedes Teilchen z nächste Nachbarn hat (bei Chang: $z = 2$). Es ergibt sich näherungsweise $g = (p^p q^q / \kappa^\kappa \lambda^\lambda \mu^\mu \nu^\nu)^N$, d. h. dasselbe wie im Fall $z = 2$. Das ist für $z = 3$ im Einklang mit Ergebnissen von Chang und Hoo (Proc. roy. Soc. London, Ser. A 180, 345 (1942)], welche auf numerischem Weg gewonnen wurden. *Ludwig Waldmann.*

Wasastjerna, Jarl A.: The configurational partition functions for binary solid solutions and the equilibrium degrees of local and long range order. Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math. 14, Nr. 7, 8 S. (1948).

In einer früheren Arbeit (s. vorsteh. Referat) stellt Verf. einen Ausdruck auf für die Anzahl der möglichen Konfigurationen in einem binären Kristall, wenn die Zahlen der Nachbarnpaare AA , AB , BB gegeben sind. Nun werden weiter eingeführt die Energien $w_{\alpha\alpha}$, $w_{\alpha\beta}$, $w_{\beta\beta}$, welche jedem dieser Paare zugehören und dann läßt sich die statistisch-mechanische Frage nach der mittleren Nachbarnverteilung bei gegebener Temperatur beantworten. Für den Fall der linearen Kette stimmt das Ergebnis mit dem von Bethes Näherung überein, im dreidimensionalen Fall

ergibt sich eine plausible Abänderung. Ferner wird auch die Fernordnung betrachtet, ein einfaches Maß dafür aufgestellt und gezeigt, daß die Einführung der Energien w nicht ausreicht, auch die Fernordnung und ihren Curie-Punkt zu verstehen.

Ludwig Waldmann.

Janssens, P. et I. Prigogine: Une généralisation de la méthode de Lennard-Jones et Devonshire pour le calcul de l'intégrale de configuration. I. *Physica* 16, 895—906 (1950).

Verff. entwickeln eine Zellenmethode zur Auswertung des Zustandsintegrals, die ein Mittel-
ding zwischen der Methode von Lennard-Jones u. Devonshire und der Methode von Van Hove ist. Die erste Methode erklärt die Wechselwirkung der Moleküle als einen zellularen Oberflächeneffekt und in ihr wird das dem Teilchen zur Verfügung stehende räumliche Volumen nur sehr wenig größer als das Eigenvolumen eines Moleküls angenommen; man kommt so zu einem Modell der Flüssigkeiten. Die zweite Methode benützt den anderen Grenzfall des Zellenmodells, bei der man die Zellen für so groß ansieht, daß Molekularkräfte kurzer Reichweite nur innerhalb der Zelle wirksam werden. Aus ihr erhält man Ergebnisse über die Existenz der freien Energie pro Teilchen und des Zustandekommens des Drucks in einem zweiphasigen Bereich. Als Mittel-
ding zwischen diesen beiden Methoden nehmen die Verff. an, daß ihre Zellen 0, 1 und 2 Moleküle aufnehmen können und berücksichtigen den Einfluß der Moleküle in den Nachbarzellen durch ein mittleres Feld. Numerische Rechnungen mit einfachen Kraftgesetzen zeigen, daß die Theorie der Verff. das kritische Volumen in besserer Übereinstimmung mit der Erfahrung berechnen läßt als die Theorie von Lennard-Jones u. Devonshire.

Walter Kofink.

Dänzer, H.: Zur Theorie des Schrot- und Johnson-Effektes. *Ann. der Physik*, VI. F. 8, 176—186 (1950).

Verf. gibt eine einheitliche mathematische Behandlung des Schrot- und Johnson-Effektes. Er entwickelt die Theorie der beiden Effekte auf parallelen mathematischen Wegen. Die Ausgangspunkte seiner Betrachtungen sind beim Schroteffekt die Stromschwankungen im Anodenkreis einer Elektronenröhre und beim Johnson-Effekt die Spannungsschwankungen an den Klemmen eines Widerstandes. Liegt im Fall des Schroteffekts ein komplexer Widerstand im Anodenkreis der Elektronenröhre, so berechnet Verf. die Spannungsschwankungen an den Enden dieses Widerstands, die mit dem Ohmschen Gesetz für Wechselströme aus den Stromschwankungen des Schroteffekts folgen. Analog berechnet er aus den Wechselstromgesetzen die Stromschwankungen, die ein dem Johnson-Effekt unterworfenen Ohmscher Widerstand in einem Stromkreis hervorruft, der neben dem Ohmschen noch einen komplexen Widerstand enthält. Das Ergebnis der Arbeit ist die Schottkysche Formel für den Schroteffekt und eine verallgemeinerte Nyquistformel für den Johnson-Effekt.

Walter Kofink.

Biegelmeier, Gottfried: Ein Beitrag zur klassischen Diffusionstheorie. *Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. IIa* 159, 161—172 (1950).

Verf. behandelt experimentell und theoretisch ein spezielles Diffusionsproblem. Als Anfangsbedingung ($t = 0$) wird angenommen, daß die Konzentration in einem um den Koordinatenursprung gelegenen Würfel Null ist, während sie im umgebenden Raum konstant ist. Gefragt wird nach der Äquikonzentrationsfläche zu einer bestimmten Zeit t . Als Lösungen resultieren transzendente Funktionen des Gaußschen Wahrscheinlichkeitsintegrals. Es zeigt sich, daß würfelförmige und quadratische Äquikonzentrationsflächen durch Diffusion in kugelsymmetrische bzw. kreisförmige Formen übergeführt werden. Es liegt nahe, auch die Entstehung von Kristallfärbungen durch Diffusionseinflüsse zu erklären.

Hans Falkenhagen.

Akulov, N. S.: Über die Diffusion transmutierender Teilchen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 61, 235—238 (1948) [Russisch].

Die Gleichung $\partial u_i / \partial t = D_i \Delta u_i + \sum_j a_{ij} u_j$ beschreibt die Diffusion der Teilchen i (u_i = Dichte, D_i = Diffusionskoeffizient) in einem Medium, wo Transmutationen stattfinden können (a_{ik} = „Transmutationsmatrix“ [s. Verf., *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 56, 695—698 (1947), *Vestnik Moskov. Univ.*, Ser. fiz. mat. estest. Nauk, Nr. 2 (1948)]). Verf. konstruiert die Lösung aus denen der Gleichung $\partial u_{0i} / \partial t = D_i \Delta u_{0i}$ durch den Ansatz: $u_i(x, y, z, t) = u_{0i}(x, y, z, t) \sum_j c_{ij} e^{k_j t}$, wo k_i die Wurzeln von $|a_{ik} - k_i \delta_{ik}| = 0$ sind. Die Randbedingungen sind die gewöhnlichen im unendlich ausgedehnten Raum. Als Beispiel wird der räumlich eindimensionale Fall durchgerechnet. Die Diffusionsgeschwindigkeit ist für große t wesentlich durch die größte Wurzel k bestimmt.

Detlof Lyons.

Dacev, A. B.: Über das lineare Stefansche Problem — der Fall von abwechseln-
den Phasen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **75**, 631—634 (1950) [Russisch].

Besteht ein Körper aus endlichvielen parallelen Schichten, die abwechselnd zwei verschiedenen Phasen desselben Stoffes angehören, und wird dieser Körper von außen in der Weise erwärmt oder abgekühlt, daß die Außentemperaturen der äußeren Schichten einen bekannten Verlauf erhalten, so entsteht eine Schwierigkeit für die Berechnung der Wärmeleitung daraus, daß sich die Grenzebenen zwischen den Phasen verschieben. Dieser Vorgang und die zugehörigen Temperaturverteilungen werden, bei bekanntem anfänglichem Verlauf der Temperaturen, hier folgendermaßen durch ein Näherungsverfahren errechnet: Die Lösung wird nur für einen allerdings beliebig großen endlichen Zeitraum gesucht. Dieser Zeitraum wird in n Abschnitte geteilt. Nimmt man an, daß sich die Phasengrenzen nicht stetig verschieben würden, sondern ruckweise zu Ende der gewählten Zeitabschnitte, so läßt sich die Temperaturverteilung für jeden Abschnitt nach bekannten Formeln berechnen. Aus den Temperaturen ergeben sich die Wärmemengen, welche am Orte der (abschnittsweise festen) Grenzebenen im Laufe des Zeitabschnittes verfügbar oder benötigt werden, und damit (über die Umwandlungswärme) die Verschiebung der Grenzebene am Ende des Zeitabschnittes. Für unendlich feine Zeiteinteilung (mit $n \rightarrow \infty$) konvergieren die Lösungen gegen die Lösung des stetigen Problems, wobei sich zugleich die Eindeutigkeit dieser Lösung beweisen läßt. Die äußeren Schichten können unendliche Dicke haben. Am Schluß finden sich Hinweise, wie weit auch das Verschwinden oder die Neubildung von Schichten mit dieser Methode zu behandeln sind. — In Gl. (3') ein Versehen: die Außentemperaturen müssen unter, nicht über der Schmelztemperatur liegen, wenn die äußeren Schichten, wie im Text und in der Definition des Faktors e in Gl. (4) angenommen wurde, zur festen Phase gehören.

Uwe Timm Bödewadt.

Blinov, V. I. und I. A. Rozet: Über das Verbrennen einer Kohlenstoffkugel.
 Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **73**, 363—366 (1950) [Russisch].

Eine Kohlenstoffkugel gleichbleibenden Halbmessers ϱ_0 brenne in einem Gasstrom, der im Unendlichen in Richtung der x -Achse mit der Geschwindigkeit v und der Sauerstoffkonzentration c_0 fließen soll. An der Kugeloberfläche ist die Sauerstoffkonzentration geringer, ihr Wert c_w ist dort eine Zonenfunktion. Die Kugelfläche wirkt als flächenhafte Senke für den Sauerstoff, die Stromdichte des eindringenden Sauerstoffes verhält sich wie c_w . c_w ergibt sich dabei als Lösung der Diffusionsgleichung, welche in früheren Arbeiten [V. I. Blinov, Trudy Voronežsk. Univ. **11**, H. 1 (1939); A. S. Predvoditelev, Žurn. techn. Fiz. **10**, H. 16 (1940); V. S. Puškin, Žurn. techn. Fiz. **18**, H. 1 (1948)] auf die Form $\delta \cdot \partial^2 c / \partial \varphi^2 = \partial c / \partial \varphi$ gebracht worden ist, wobei $\delta = D/v$ mit D als Diffusionskonstante und $\varphi = \int r^2 d\varphi_1$, $\varphi_1 = x(1 + \frac{1}{2} \varrho_0^3 \varrho^{-3}) + \frac{3}{2} \varrho_0$, $\varphi = \frac{1}{2} r^2(1 - \varrho_0^3 \varrho^{-3})$ mit $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + r^2$. In den genannten Arbeiten war die Aufgabe nur unter verschiedenen Vereinfachungen der strengen Randbedingung $D \partial c / \partial n = k c_w$ gelöst worden. Die Verff. bringen hier eine strenge Lösung durch Reihenentwicklung nach halben Potenzen von $\delta = \varphi/2 \varrho_0^3$. Die Abweichungen der früher a. a. O. von Blinov gebrachten Näherungsformel für die Sauerstoff-Oberflächenkonzentration betragen nicht mehr als 5 bis 6 %.

Uwe Timm Bödewadt.

Fukuda, Nobuji and Teruya Yosikawa: Conduction of heat in a cylinder composed of three different materials. J. Osaka Inst. Sci. Technology **2**, 53—65 (1950).

Ein unendlich langer Zylinder aus dreifachem Material ($r = 0 \dots a$, $a \dots b$, $b \dots c$) befindet sich anfänglich auf der Temperatur 0. Von der Zeit 0 an erhält die Außenfläche $r = c$ die feste Temperatur $T_0 > 0$. Danach soll die Temperatur überall stetig bleiben. Die Erwärmung des Zylinders wird berechnet. In jedem Abschnitt ist die Temperatur eine Zylinderfunktion nullter Ordnung; es gelingt den Verff., die Beiwerte der Funktionen erster und zweiter Art zu berechnen und für die zunächst unübersichtlichen Ausdrücke in Besselschen Funktionen, welche sich so für die Temperaturen der verschiedenen Gebiete ergeben, gleichartige Integraldarstellungen zu finden, aus denen schließlich noch Reihenentwicklungen abgeleitet werden. Das Verfahren ist auf eine noch größere Anzahl koaxialer Zylinderschichten übertragbar. — An Druckfehlern mangelt es weder im Text noch in den Formeln.

Uwe Timm Bödewadt.

Elektrodynamik. Optik:

• **Sears, Francis Weston: Electricity and magnetism.** (Principles of Physics Series II.) Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Press, Inc., 1947. 434 p. \$ 6,—.

Dieser 2. Band der vom Verf. veröffentlichten Vorlesungen (vgl. dies. Zbl. **40**, 392) setzt —

worauf Verf. auch ausdrücklich hinweist — etwas größere Vorkenntnisse voraus, als es bei seinen Büchern über Technik, Wärme und Schall der Fall ist. Als Maßsystem ist das (m, kg, s)-System zugrunde gelegt. Es wird zunächst das Coulombsche Gesetz behandelt. Hier geht Verf. auch kurz auf die atomistische Struktur der Materie und die Struktur des Atoms ein. Anschließend behandelt er das elektrische Feld, das Potential, elektrische Ströme und die damit in Zusammenhang stehenden Gesetzmäßigkeiten. Er betrachtet die chemisch-thermischen Grundlagen der elektromotorischen Kräfte, die Eigenschaften der Dielektrika, die Gesetze der Kapazität des Kondensators, ferner das magnetische Feld, auch in seiner Anwendung auf die verschiedenen elektromagnetischen Meßinstrumente, das magnetische Feld eines Stromes und einer bewegten Ladung und die damit in Zusammenhang stehenden elektromagnetischen Erscheinungen, die magnetischen Eigenschaften der Materie, den Ferromagnetismus, Wechselströme, elektrische Schwingungen und elektrische Wellen sowie zum Schluß die Geräte, die unmittelbar auf der Bewegung der Elektronen in gasverdünnten Medien beruhen. — Das Buch ist verhältnismäßig leichtverständlich geschrieben. Verf. erläutert vielfach die Gesetzmäßigkeiten an zweckentsprechend gewählten Beispielen. Auch sprachlich ist es verhältnismäßig leicht lesbar, so daß es sich auch für Nicht-Engländer zum Studium empfiehlt. (Eine Äußerlichkeit, die dem Ref. weniger angenehm auffiel: Verf. bezeichnet die kinetische Energie durch KE, die potentielle Energie durch PE, was zu Mißverständnissen führen kann, indem man die beiden nebeneinander gestellten Buchstaben als Produkt zweier Größen anspricht. Dasselbe gilt von der Abkürzung p für Potentialdifferenz, zumal wenn diese Bezeichnungen in Formelausdrücken auftreten.) Angenehm wird vermerkt, daß das Buch mit einer großen Zahl von Zeichnungen und Abbildungen ausgestattet ist, die für das Verständnis der jeweiligen Problemstellung eine wesentliche Erleichterung darstellen. Jedem Kapitel ist wieder eine Reihe von Übungsaufgaben hinzugefügt, deren Lösungen in einem Anhang mitgeteilt werden.

Johannes Picht.

● Heaviside, Oliver: *Electromagnetic theory. — Complete and unabridged edition of Vol. 1, 2 and 3, with a critical and historical introduction by Ernst Weber.* New York: Dover Publications, Inc.; London: E. and F. N. Spon, Ltd., 1950. XXX, 386 p. 63 s.

● Kneissler, L.: *Die Maxwell'sche Theorie in veränderter Formulierung.* Wien: Springer-Verlag 1949. X, 51 S., DM 6,—.

Le ricerche esposte in questa monografia risalgono agli anni 1940, 1941, 1942 (v. L. Kneissler-Maixdorf, questa Zbl. 24, 139 25, 123, 27, 360). L'origine di esse sta nel carattere poco soddisfacente della teoria elettromagnetica di Maxwell riguardo al modo di caratterizzare il comportamento dei corpi nei riguardi elettromagnetici in generale e di rappresentare il campo magnetico in presenza di corpi ferromagnetici in particolare. L'A. propone una teoria in cui le correnti elementari di Ampère costituiscano uno strumento sistematico di indagine al posto delle quantità di magnetismo. La caratteristica della teoria è di fondarsi su equazioni in cui figurano una sola grandezza elettrica, la \mathcal{E} , ed una sola magnetica, la \mathcal{B} , e di evitare ogni indagine sul comportamento della materia nei campi elettrici e magnetici. La materia neutra interviene come agente sulle cariche elettriche e contribuisce alla legge elementare della forza ponderomotrice mediante un termine addizionale che però non dà luogo ad alcun contributo quando si passa al punto di vista microscopico, in quanto la legge di forza deve ridursi a quella di Lorentz. — L'A. stabilisce l'espressione degli sforzi elettrici e magnetici. Notevole è la possibilità di costruire un tensore degli sforzi elettrici e un tensore degli sforzi magnetici in termini della sola \mathcal{E} e della sola \mathcal{B} rispettivamente. Il sistema di misure adottato dall'A. è quello di Lorentz; viene negato un significato fisico alla costante dielettrica e alla permeabilità magnetica del vuoto e per quanto riguarda i corpi queste costanti materiali vengono definite solo come strumenti di puro calcolo. L'A. rivolge anche la sua attenzione al problema dell'elettrodinamica dei corpi in moto, ma non fa alcuna considerazione che oltrepassi ciò che è stato acquisito intorno ad esso sulla base dei principi generali di Einstein e Minkowski. In sostanza questa teoria di Kneissler aspira ad essere una teoria macroscopica del campo elettromagnetico che si raccordi con la teoria degli elettroni di Lorentz meglio della teoria di Maxwell. Giovanni Lampariello.

Mirimanov, R. G.: *Über die Lösung eines allgemeinen Problems der angewandten Elektrodynamik.* Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 71, 879—882 (1950) [Russisch].

Das Problem der Bestimmung des elektromagnetischen Feldes in einem homogenen Medium, in welches eine endliche Anzahl von Leitern und Erregern eingebettet ist, führt bekanntlich auf ein System von Integralgleichungen, welche leicht aus den Maxwell'schen Gleichungen mittels der bekannten Integralsätze der Vektoranalysis abgeleitet werden können. Verf. stellt diese Gleichungen für verschiedene

Anordnungen auf und behandelt eingehend den Fall des von einem Dipol erregten Feldes, wenn sich in dem nichtleitenden Medium ein flächenhaft ausgedehnter Leiter sehr kleiner Dicke h und beliebiger Gestalt befindet. Es ergibt sich nach einigen Umformungen eine Integrodifferentialgleichung, die durch Potenzreihenentwicklung nach dem Parameter h gelöst wird.

Willi Rinow.

Colombani, Antoine: Sur la résistance des enroulements électriques en haute fréquence. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 493—495 (1949).

Verf. berechnet den Ohmschen Hochfrequenzwiderstand von aus Litzendraht gewickelten Spulen für Frequenzen bis über 2 MHz hinaus. Es gelingt ihm, die Sommerfeldsche Formel für den Wechselstromwiderstand einer Spule wiederzufinden.

Paul August Mann.

Price, A. T.: The induction of electric currents in non-uniform thin sheets and shells. Quart. J. Mech. appl. Math. 2, 283—310 (1949).

Es werden allgemeine Gleichungen aufgestellt für die Induktion elektrischer Ströme, die von periodischen und aperiodischen Feldern in dünnen leitenden Schichten induziert werden. Methoden werden angegeben für die Lösung in ungleichförmigen Schichten, speziell sphärischen Schalen. Numerische Berechnungen für eine ebene Schicht erläutern die auftretenden physikalischen Erscheinungen. Hier wird mit Rücksicht auf geomagnetische Anwendungen im einzelnen das physikalische Verhalten an einer Kugelschale diskutiert. Näherungsmethoden werden angegeben für die Berechnung der Induktionseffekte, wenn die Leitfähigkeit als empirische Funktion dargestellt ist.

Paul August Mann.

Slepian, Joseph: Electromagnetic ponderomotive forces within material bodies. Proc. nat. Acad. Sci. USA 36, 485—497 (1950).

Für die ponderomotorischen Kräfte eines elektrostatischen Feldes in materiellen Körpern sind mehrere voneinander verschiedene Ansätze gegeben worden. Verf. versucht in der vorliegenden Mitteilung die Anschauung zu begründen, daß eine physikalisch sinnvolle Definition niemals zu einem eindeutig bestimmten Ausdruck für den elektrischen Spannungstensor im Innern materieller Körper führen kann.

Willi Rinow.

Ledinegg, E. und P. Urban: Über die Verlustwinkelbestimmung von Materialien mit hoher Dielektrizitätskonstante. Acta phys. Austr. 4, 197—212 (1950).

In einer früheren Arbeit (E. Ledinegg und E. Fehrer, dies. Zbl. 38, 389) ist das Feld vom E -Typus in einem zylindrischen Hohlraumresonator beliebiger Grundfläche bestimmt worden, in dem sich ein horizontal geschichtetes Dielektrikum befindet. Es ergibt sich daraus folgendes: Führt man in den leeren Resonator eine dielektrische Platte ein, so ändert sich die Resonanzfrequenz im allgemeinen, besitzt die Platte jedoch eine bestimmte kritische Dicke, so bleibt die Resonanzfrequenz sowie der Feldlinienverlauf im dielektrikumfreien Raumteil erhalten. Es wird nun der Verlustwinkel in Abhängigkeit von den Dämpfungsgrößen berechnet und ein Verfahren beschrieben, das zur experimentellen Bestimmung des Verlustwinkels auch bei großer Dielektrizitätskonstante geeignet ist.

Willi Rinow.

Parodi, Maurice: Sur la détermination d'une limite supérieure de la partie réelle des racines de l'équation aux fréquences propres d'un réseau électrique. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1400—1402 (1949).

Bei elektrisch passiven, beliebig vermaschten Netzwerken ohne innere Spannungsquellen führt die Bestimmung der Eigenfrequenzen auf die Lösung der Determinante $||l_{ij}z^2 + r_{ij}z + s_{ij}|| = 0$ l_{ij} , r_{ij} , s_{ij} stellen Eigen- und Wechselimpedanzkoeffizienten (Induktionskoeffizienten, Widerstände, Kapazitäten) dar, $z = i\omega$ (ω = Kreisfrequenz). Verf. gibt ein Verfahren an, nach dem man aus einigen Ungleichungen die kleinste Dämpfung einer Eigenfrequenz bestimmen kann.

Paul August Mann.

Grivet, P. et Yves Rocard: La réaction dans les chaînes et réseaux d'analogie électrique. *Rev. sci.*, Paris 87, 85 (1949).

Zimmermann, F.: Die Auflösung knotenpunktsbelasteter elektrischer Netze mittels Matrizen. *Österreich. Ingenieur-Arch.* 4, 243—251 (1950).

Ein elektrisches Netzwerk sei an den Knotenpunkten mit vorgeschriebenen Stromentnahmen belastet. Dann bestehen zwischen diesen Belastungsströmen, den Strömen in den Zweigen des Netzwerks, den unabhängigen Spannungen im Netzwerk und den sämtlichen Spannungen im Netzwerk lineare Relationen, welche Verf. in Matrizenschreibweise hinschreibt. *Alfred Stöhr.*

Blachman, Nelson M.: The demodulation of an F-M carrier and random noise by a limiter and discriminator. *J. appl. Phys.* 20, 38—47 (1949).

Für den Fall, daß bei der Signalübertragung mittels Frequenzmodulation der Frequenzhub kleiner oder gleich ist der höchsten zu übertragenden Niederfrequenz, wird das Signal-Stör-Verhältnis am Ausgang eines Empfängers für Frequenzmodulation angegeben. Hier fallen alle vorhandenen Störkomponenten in den Hörbereich und man braucht, um die Störenergie, d. h. die quadratischen Mittelwerte anzugeben, die Störschwingungen nicht spektral zu zerlegen. Verf. gibt in analytischer Form das Signal-Rausch-Verhältnis am Ausgang für beliebiges Störverhältnis am Eingang des Empfängers an, sowohl für (ideale) Amplitudenbegrenzung als auch ohne Amplitudenbegrenzung. *Paul August Mann.*

Knipp, Julian K.: On the velocity-dependent characteristics of high frequency tubes. *J. appl. Phys.* 20, 425—431 (1949).

Verf. erweitert die F. B. Llewellynsche Theorie (Electron Inertia Effects, London 1939) der Elektronendynamik in einer Mehrgitterelektronenröhre, die als ebenes Problem behandelt wird, indem er im Gegensatz zu Llewellyn auch die höheren Geschwindigkeitsmomente berücksichtigt. *Paul August Mann.*

Cotte, Maurice: Emploi d'une impulsion pour l'essai d'un système de transmission linéaire. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 231, 117—119 (1950).

Soh, Hsin P.: On the advanced solution of the wave equation. *Chinese J. Phys.* 7, 491—496 (1950).

Niessen, Karel Frederik: The earth's constants from combined electric and magnetic measurements partly in the vicinity of the emitter. *Z. Naturforsch.* 3a, 552—558 (1948).

Verf. zeigt, wie man aus Messungen der vertikalen elektrischen Feldstärke und des azimutalen Magnetfelds bei einem an der Erdoberfläche befindlichen Sender Rückschlüsse ziehen kann auf die Erdbodeneigenschaften (Dielektrizitätskonstante, Permeabilität und Leitfähigkeit). Im Gegensatz zu früheren ähnlichen Verfahren kann die Messung in unmittelbarer Nachbarschaft des Senders ausgeführt werden (2 bis 4 Wellenlängen Abstand) und es braucht nicht vorausgesetzt zu werden, daß der Leitungsstrom groß ist gegenüber dem Verschiebungsstrom.

Paul August Mann.

Westfold, K. C.: On Kramer's formula for the frequency distribution of the radiation emitted by an electron in a parabolic orbit. *Philos. Mag.*, VII. Ser. 40, 698—703 (1950).

Jones, D. S. and F. B. Pidduck: Diffraction by a metal wedge at large angles. *Quart. J. Math.*, Oxford II. Ser. 1, 229—237 (1950).

Die Greenschen Funktionen für das Äußere eines unendlich ausgedehnten Keils sind bereits von Macdonald und Schwarzschild angegeben worden. Mit ihrer Hilfe behandelt Verf. die Beugung am Keil, zunächst unter der Voraussetzung idealer Leitfähigkeit. Die auftretenden Integrale werden nach der Kelvinschen Methode angenähert berechnet. Als Quelle wird dabei eine gleichmäßige Verteilung

von elektrischen Dipolen längs einer zur Kante des Keils parallelen Geraden angenommen. Für den Fall nichtidealer Leitfähigkeit wird unter Voraussetzung geringer Eindringtiefe noch ein Korrektionsglied berechnet. *Willi Rinow.*

Jones, D. S.: Note on diffraction by an edge. *Quart. J. appl. Math.* 3, 420—434 (1950).

Unter der Annahme, daß der elektrische Strom und die Ladung auf einem vollkommen leitenden Schirm in der Nachbarschaft des Randes stetig verteilt sind, zeigt Verf., daß die lineare Verteilung des elektrischen Stromes und der Ladung auf dem Rand durch die Grenzbedingungen auf dem Schirm bestimmt sind. Als eine derartige Grenzbedingung auf dem Rand wird angenommen, daß es dort keine Verteilungslinien des magnetischen Stromes und der Ladung gibt. Es wird gezeigt, daß das Feld dann eindeutig bestimmt ist. Es wird weiter bewiesen, daß — sofern die Ströme in der Nachbarschaft des Randes eine Reihenentwicklung erlauben — der Exponent des ersten Gliedes dieser Reihenentwicklung den Wert $(2P + 1)/2$ besitzt, wo P größer als -2 oder -1 ist je nachdem, ob die Ströme parallel oder senkrecht zu dem betrachteten Rand verlaufen. Ferner wird die Beugung einer ebenen Welle an einer halbbunendlichen Ebene dreidimensional behandelt. — Die Behandlung erfolgt im wesentlichen vektoriell. Dabei wird ausgegangen von den Formeln

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}_0 + \frac{i\omega}{4\pi k^2} \oint_{S_1 + S_2} \left\{ -k^2 \psi [\mathfrak{B}_1 d\mathfrak{E}] + (d\mathfrak{E} \operatorname{rot}' \mathfrak{B}_1) \operatorname{grad}' \psi + \frac{i k^2}{\omega} [[d\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_1] \operatorname{grad}' \psi] \right\} \\ -\mathfrak{B} &= \mathfrak{B}_0 + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1 + S_2} \left\{ \frac{i k^2}{\omega} [\mathfrak{E}_1, d\mathfrak{E}] \psi - [[d\mathfrak{E}, \mathfrak{B}_1] \operatorname{grad}' \psi] - (d\mathfrak{E} \mathfrak{B}_1) \operatorname{grad}' \psi \right\}. \end{aligned}$$

Hierin sind \mathfrak{E}_0 bzw. \mathfrak{B}_0 die elektrische Feldstärke und die magnetische Flußdichte des auf den Schirm fallenden Feldes, der als im Vakuum stehend vorausgesetzt wird. \mathfrak{E} und \mathfrak{B} sind die elektrische Feldstärke und magnetische Flußdichte des resultierenden Feldes. Es ist vorausgesetzt, daß $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0$ der Ausstrahlungsbedingung im Unendlichen genügen.

Johannes Picht.

Mertens, Robert: On the theory of the diffraction of light by supersonic waves. *Simon Stevin* 27, 212—230 (1950).

Zur Theorie der Beugung von Licht durch Ultraschallwellen liegen bereits mehrere theoretische Arbeiten vor, die zum Teil recht kompliziert sind. Verf. behandelt das Problem erneut, indem er die partielle Differentialgleichung, die die Erscheinung der Lichtbewegung durch fortschreitende Ultraschallwellen bei senkrechtem Lichteinfall beschreibt, durch eine Trennung der Variablen löst. Von diesen Differentialgleichungen, die sich durch Trennung der Variablen ergeben, hat die eine die Form der Mathiesuschen Gleichung. Das elektrische Feld der Lichtwelle kann in Reihendarstellung angegeben werden, von denen jeder Term einem der gebeugten Lichtstrahlen entspricht. Es zeigt sich — wie bekannt —, daß die Intensität der Spektren symmetrisch mit Bezug auf das Spektrum 0-ter Ordnung ist. Das Ergebnis des Verf. stimmt überein mit den Theorien von Raman und Nagendra Nath. Im zweiten Teil der Arbeit wird die Lichtbewegung an stehenden Ultraschallwellen behandelt, wobei dieser Fall auf den vorhergehenden als Spezialfall zurückgeführt wird. Es zeigt sich, daß zwei gerade oder zwei ungerade Spektren immer partiell kohärent sind, während ein gerades und ein ungerades Spektrum nicht kohärent sind, entsprechend den experimentellen Ergebnissen von R. Bär und den früheren theoretischen Ergebnissen von Raman-Nath. Unter Benutzung der Lösungsfunktion der Mathiesuschen Differentialgleichung berechnet Verf. auch zahlenmäßig die bei der eben erwähnten Reihenentwicklung auftretenden Koeffizienten. *Johannes Picht.*

Tedone, Giuseppe: Sulla configurazione dei fronti d'onda epicentrali in certi mezzi isotropi eterogenei. *Rend. Mat. e Appl.*, V. Ser. 8, 246—253 (1949).

Unter der Voraussetzung, daß der Brechungsindex eines Mediums einer Potenz des Abstandes von einem festen Punkt O proportional sei, wird die Gleichung der Meridiane der Wellenflächen für von einem Punkt E ausgehendes Licht aufgestellt.

Danach werden einige geometrische Eigenschaften der Lichtwege und der, wie bekannt, in bezug auf den Pol O anallagmatischen Wellenflächen entwickelt; schließlich wird die Krümmung der Meridiankurven berechnet und diskutiert.

Frank Löbell.

● **Rusterholz, Alexander A.: Elektronenoptik. Band 1: Grundzüge der theoretischen Elektronenoptik.** (Lehr- und Handbücher der Ingenieurwissenschaft 15.) Basel: Verlag Birkhäuser 1950. 249 S. Geb. Schw. Fr. 31,20, brosch. Schw. Fr. 27,05.

Verf. setzt sich zur Aufgabe, das zahlreiche theoretische Tatsachenmaterial der Elektronenoptik, wie es vor allem für die Dimensionierung elektronenoptischer Systeme erforderlich ist, zu sichten und zusammenzustellen. In guter, übersichtlicher Gliederung bringt die Darstellung die Grundlagen der Berechnung der Elektronenbahnen, die Bestimmung der Kardinalpunkte von Elektronenlinsen, die Bildfehlertheorie auf Grund der Eikonalmethode, die Theorie der zweidimensionalen Felder (Elektronenprismen) und das Wichtigste über den Elektronenspiegel. Leider ist auch manch Überholtes und z. T. Unrichtiges in die Darstellung hineingeraten. So sind von den acht auf S. 155 nach Hutter angeführten Abbildungsfeldern mit angeblich Newtonscher Abbildungsgleichung außer dem magnetischen Glockenfeld und seinem elektrischen Analogon, kein einziges, das tatsächlich eine Newtonsche Abbildung besitzt. Ferner ist die „strenge Durchrechnung einer elektrischen Linse“ S. 138 und S. 190 unhaltbar, da die verwendete Linse paradoxe Eigenschaften besitzt usw. Das Buch ist flüssig geschrieben und gut ausgestattet.

Walter Glaser.

Glaser, W.: Richtungs-Doppelfokussierung von Elektronenbahnen in inhomogenen elektrisch-magnetischen Feldern. Österreich. Ingenieur-Arch. 4, 354—362 (1950).

In der Geschwindigkeits- und Massenspektroskopie handelt es sich um Elektronenstrahlenbündel, deren Hauptstrahl eine zur Achse des zylindersymmetrischen elektrisch-magnetischen Feldes symmetrisch gelegener Kreis ist. Die von einem Objektpunkt des Hauptstrahls nach verschiedenen Richtungen ausgehenden Elektronenstrahlen werden den Hauptstrahl im allgemeinen nicht in ein und demselben Punkt treffen, sondern nach dem Durchgang durch das zylindersymmetrische elektrisch-magnetische Feld ein astigmatisches Strahlenbündel bilden. Die Verhältnisse sind bereits in einer größeren Zahl von Arbeiten von verschiedenen Verfassern diskutiert worden. Verf. vorliegender Arbeit leitet die Bedingungen ab, die erfüllt sein müssen, damit das Strahlenbündel nach dem Durchgang durch das elektrisch-magnetische Feld anastigmatisch ist. Die Elektronenbewegung läßt sich in einem solchen Feld bekanntlich auf eine Funktion $Q(r, z)$ zurückführen derart, daß $\dot{r} = \partial Q / \partial r$, $\dot{z} = \partial Q / \partial z$ ist. Unter der Bedingung, daß $Q_{rr} Q_{zz} - Q_{rz}^2 > 0$ und $Q_{rr} + Q_{zz} < 0$ ist, gibt es 2 in der quasistatischen Kreisbahn einander senkrecht durchdringende Kreiskegel mit der Feldachse als Achse und Öffnungswinkel, die sich zu $\pi/2$ ergänzen. Auf diesen Kreiskegeln werden die Elektronenbahnen fokussiert, wobei natürlich nur von wenig geöffneten Strahlenbündeln gesprochen wird. Verschwindet das Kopplungsglied Q_{rz} , soartet der eine Kegel in einen Zylinder $r = \text{const}$, der andere Kegel in eine achsen senkrechte Ebene $z = \text{const}$ aus, die beide aber im allgemeinen die kreisförmige Achse des Bündels in verschiedenen Punkten treffen, die vom Objektpunkt um die Fokussierungswinkel ψ_r bzw. ψ_z entfernt sind; beide werden einander gleich, wenn außer $Q_{rz} = 0$ noch $Q_{rr} = Q_{zz}$ ist. In diesem Fall kann man von anastigmatischer Strahlenvereinigung sprechen. An einigen speziellen Beispielen diskutiert Verf. die Verhältnisse näher.

Johannes Picht.

Berz, Feodora: Note on potentials derived from axial values in electron optics. Philos. Mag., VII. Ser. 41, 209—220 (1950).

Es wird die Bestimmung der Elektrodenformen, die in ebenen oder rotationssymmetrischen elektrischen Feldern ein bestimmtes Achsenpotential erzeugen, allgemein untersucht. Es zeigt sich zunächst, daß eine analytische Potentialverteilung völlig bestimmt ist, wenn ihre Werte längs eines beliebigen kleinen Intervalles auf der Achse exakt vorgegeben sind. Wenn andererseits, wie in der Praxis, die Werte des Potentials längs einer endlichen Strecke auf der Achse nur innerhalb gewisser durch die Meßgenauigkeit bestimmter Grenzen vorgegeben werden, gibt es dazu unendlich viele, verschiedene räumliche Potentialverteilungen, welche dieses Achsenpotential besitzen. Diese räumlichen Potentialverteilungen können so konstruiert werden, daß sie in endlichen Entfernungen keine Singularitäten aufweisen und in einer beliebigen Zahl von Punkten außerhalb der Achse vorgegebene Werte annehmen. Der Beweis beruht auf dem Prinzip der analytischen Fortsetzung und dem Satz von Weierstraß über die Approximation einer stetigen Funktion durch ein Polynom in einem Intervall, in dem die Funktion stetig ist. Im Anhang wird auf die bekannten Eigenschaften der Tscheycheffschen Polynome, die sie für die erwähnte Approximation durch Interpolation besonders geeignet machen, hingewiesen.

Walter Glaser.

Quantentheorie:

● **Gombás, P.:** Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften Nr. 22, Physikalische Reihe, Bd. II.) Basel: Verlag Birkhäuser 1950. 268 S. Schw. Fr. 29.50.

Dieses Buch stellt, von einem hervorragenden Sachkenner geschrieben, eine ausgezeichnete Zusammenstellung der angewandten Quantentheorie dar, mit besonderer Betonung der Atom- und Molekülprobleme einerseits, sowie der allgemeinen Rechenmethoden andererseits. In einem ersten Teil über die allgemeine Theorie des wellenmechanischen Mehrteilchenproblems werden zunächst die Elemente der Quantenmechanik kurz zusammengestellt und für die verschiedenen hier in Betracht kommenden Probleme formuliert wie Einteilchenproblem, Systeme aus Teilchen ohne und mit Wechselwirkung, Teilchen mit Spin und wellenmechanische Formulierung des Pauliprinzip. Diese allgemeine Theorie wird in den folgenden Kapiteln des ersten Teils angewandt auf Atome, Moleküle, Systeme großer Teilchenzahl (Fermi- und Bose-Statistik) und in einem Kapitel über Wellenquantelung abgeschlossen. Der zweite Teil behandelt die Lösungsmethoden des wellenmechanischen Mehrteilchenproblems. Im Vordergrund steht dabei das Ritzsche Variationsverfahren, ergänzt durch eine kurze Darstellung der Methode des „self-consistent field“ nach Hartree-Fock, sowie des statistischen Atommodells. Ein Anhang mit den Formeln und Integralen, welche die Rechentechnik dieses Gebietes benötigt, rundet die Darstellung ab. — In ihrem bewußten Verzicht auf eine Darstellung der mehr allgemeinen und erkenntnistheoretischen Grundlagen der Quantenmechanik ist diese Darstellung gerade mehr auf die Bedürfnisse des technischen Physikers und Physikochemikers zugeschnitten. Die Rechnungen sind klar und übersichtlich unter Betonung des Wesentlichen abgefaßt und führen den Leser bis in die numerischen Ergebnisse. Ausführliche Zusammenstellungen vermitteln einen vollständigen Anschluß an die Weltliteratur.

Wilhelm Macke.

Lévy, Maurice: Wave equations in momentum space. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 204, 145—169 (1950).

Verf. gibt in § 1 eine Übersicht über die bisherigen Veröffentlichungen auf dem im Titel genannten Gebiet. In § 2 werden Schrödinger- und Dirac-Gleichung im Impulsraum aufgestellt. Falls die Fourier-Transformierte des Potentials $U(p)$ nur von $|p|$ abhängt, ergibt sich für den Radialteil der Wellenfunktion (in einem $q + 2$ -dim. Raum) eine Integralgleichung vom Typ:

$(1 + q^2) G(q) = \text{const} \int_0^\infty G(q') K(q, q') q'^{a+1} dq'$ mit potentialabhängigem Kern. Bei der Ab-

leitung dieser Gleichung wird von einer Verallgemeinerung der als Satz von Hecke zitierten Funktionalen Integralgleichung Gebrauch gemacht. Für die Dirac-Gleichung erhält man ein System von zwei Integralgleichungen ähnlichen Typs. § 3 bringt eine allgemeine Methode zur Lösung dieser Gleichungen (Hilfsmittel: die Focksche Transformation $q = \text{tg } \varphi/2$; $q' = \text{tg } \varphi'/2$), und eine Erläuterung an dem Beispiel $U(z) = z^{-3}$. — Als Anwendung wird in den beiden folgenden Paragraphen das H-Atom und der Fall des statischen Mesonpotentials behandelt. Zur Berechnung der (nichtrelativistischen) Lösung für das Mesonpotential werden $G(q)$ und $K(q, q')$ nach einem kleinen Parameter χ entwickelt; die Bedingung $\chi \ll 1$ ist bei Anwendungen auf Kernprobleme gewöhnlich nicht erfüllt. Im letzten Paragraphen wird der allgemeinere Fall

$U(z) = \sum_0^\infty a_i \xi^i z^i$ mit genügend kleinem ξ diskutiert. — In einem Anhang findet sich u. a. der

Satz von Hecke, die Fourier-Transformierte von $r^\nu e^{-kr}$ und ein Literaturverzeichnis.

Wolfram Urich.

Onicescu, O.: L'induction de la mécanique ondulatoire de celle corpusculaire. An. Acad. Republ. Popul. Române, Ser. Mat. Fiz. Chim. 3, 283—300, russische und französ. Zusammenfassgn. 301—302, 303—304 (1950) [Rumänisch].

Motchane, Léon: Exemples d'applications de la représentation des notions fondamentales de la mécanique par des fonctions unilatérales. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 2264—2266 (1950).

Der vom Verf. in einer vorangehenden Arbeit (dies. Zbl. 35, 424) eingeführte Begriff der einseitigen Funktionen soll geeignet sein, einen neuen Zugang zur Quantisierung zu geben. Dies wird am Beispiel des harmonischen Oszillators und des Rotators verdeutlicht.

Friedrich Leo Bauer.

Ivanenko, D. und A. Sokolov: Zur Theorie der Para- und Ortho-Zustände der Elementarteilchen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **61**, 51—53 (1948) [Russisch].

Verf. berechnen die Lebensdauer eines gebundenen Zustandes des Systems Elektron-Positron. Dazu wird zunächst der Wirkungsquerschnitt für einen Zerstahlungsprozeß der freien Teilchen für die beiden Fälle parallelen oder antiparallelen Spins getrennt bestimmt. Für den Orthozustand ist die 2-Quanten-Zerstrahlung verboten. Der Wirkungsquerschnitt für eine Paarvernichtung ist daher in diesem Fall um einen Faktor der Größenordnung 137 kleiner als im Parazustand. Die Lebensdauer der gebundenen Zustände wird aus diesen Wirkungsquerschnitten und der Stromdichte im Ursprung berechnet. (Es ergeben sich Halbwertszeiten von der Größenordnung 10^{-9} bzw. 10^{-6} sec. D. Ref.). *Haag.*

Araki, Gentaro: On the difficulty of the meson theory of nuclear forces. Phys. Review, II. Ser. **75**, 1101—1102 (1949).

Die Mesonentheorie der Kernkräfte führt im allgemeinen auf Potentialausdrücke, die u. a. ein Glied mit r^{-3} enthalten, für welches keine stationären Lösungen der Schrödingergleichung möglich sind. Diese singulären Anteile des Wechselwirkungspotentials lassen sich nach Möller und Rosenfeld jedoch durch geeignete Mischungen verschiedener Mesonentheorien mit unterschiedlichem Feldcharakter beseitigen. Verf. war nun im Rahmen eigener Untersuchungen auf andere Divergenzschwierigkeiten für die Wechselwirkungsenergie von Nukleonen gestoßen und teilt in der vorliegenden Note nur mit, daß jedenfalls für pseudoskalare Feldtheorien diese letzteren Divergenzen nur durch die nach der üblichen Methode durchgeführte, in relativistischer Hinsicht unzureichende Rechnung vorgetäuscht sind.

Erich Bagge.

Araki, Gentaro: On the vector and pseudovector theories of nuclear forces. Phys. Review, II. Ser. **75**, 1262 (1949).

Das Zweinukleonen-Potential enthält keine Glieder, die bei $r = 0$ wie r^{-3} oder stärker divergieren, wenn dieses aus einer pseudoskalaren Mesonentheorie abgeleitet wird. Es wird untersucht, welche Anteile der Hamiltonfunktionen für vektorielle und pseudovektorielle Mesonentheorien zum Auftreten von singulären Anteilen des Wechselwirkungspotentials zweier Nukleonen vom oben ausgeschlossenen Charakter führen. Die Wirkungen dieser Terme in den entsprechenden Hamiltonfunktionen werden durch Hinzufügung geeigneter Gegenterme eliminiert und dann die zugehörigen Wechselwirkungspotentiale berechnet und kurz angegeben.

Erich Bagge.

Tzu, H. Y.: On the interaction between mesons. Philos. Mag., VII. Ser. **40**, 717—732 (1949).

Verf. betrachtet die Wechselwirkung von neutralen pseudoskalaren Mesonen untereinander, die durch virtuelle Nukleon-Antinukleon-Paare vermittelt werden. Zuerst wird eine allgemeine Beziehung abgeleitet zwischen der Impulsabhängigkeit des Matrixelementes für die Streuung von Mesonen und der Singularität des Wechselwirkungs-Potentials. Dann werden mittels der Diracschen Löchertheorie [Dirac, Proc. Cambridge philos. Soc. **30**, 150 (1934), dies. Zbl. **9**, 137 und Heisenberg, Z. Phys. **90**, 209 (1934); dies. Zbl. **10**, 41] modifizierte Vakuum-Feldgleichungen abgeleitet, welche die Meson-Meson-Wechselwirkung bei niedrigen Energien richtig beschreiben. Berechnet man damit den Wirkungsquerschnitt für die Streuung langsamer Mesonen aneinander, so zeigt sich, daß die Reichweite der Meson-Meson-Kräfte von der Größenordnung 10^{-29} cm². Für die gegenseitige Streuung hochenergetischer Mesonen findet man, daß das Matrixelement mit dem Quadrat des Impulses der Teilchen anwächst, und daraus ergibt sich für die Singularität des Meson-Meson-Potentials die Form R^{-5} , wenn R der Abstand zweier Mesonen ist.

Reinhard Oehme.

Lipmanov, E. M.: Über die invarianten Vertauschungsbeziehungen und das Ausschließen von zusätzlichen Bedingungen in der Quantentheorie des Mesonenfeldes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **67**, 627—630 (1949) [Russisch].

Bei einem vektoriellen Feld müssen neben den Feldgleichungen, die die zeitlichen Ableitungen der Feldgrößen bestimmen, noch Nebenbedingungen gestellt werden. Durch Elimination von Feldgrößen mittels der Nebenbedingungen und Einführung neuer Operatoren für die übrigen Feldgrößen werden die Hamiltonfunktion und die invarianten Vertauschungsbeziehungen wieder sehr einfach.

Friedrich Hund.

Hjalmars, Stig: On the general formulation of meson pair theory. Ark. Fys. 4, Nr. 3, 41—116 (1949).

In einer ausführlichen und systematischen Untersuchung wird die Theorie geladener skalarer und vektorieller Mesonen zur Erzeugung der Nukleonenwechselwirkung herangezogen. Dabei werden speziell alle solchen Wechselwirkungsglieder untersucht, welche bilinear nicht nur bezüglich der Wellenfunktion des Nukleons, sondern auch bezüglich der Wellenfunktionen des Mesons sind, wodurch die Mesonen nur paarweise zur Wechselwirkung beitragen können. Zur Darstellung wird der zuerst von Majorana verwandte Formalismus der verallgemeinerten Diracgleichung herangezogen für die Beschreibung der skalaren und vektoriellen Mesonen. Ein Vergleich mit experimentellen Daten wird nicht durchgeführt. Die hier untersuchten „Mesonenpaarkräfte“ treten also lediglich als a priori gleichberechtigte Möglichkeiten neben die bisher untersuchten Wechselwirkungen, in denen die Wellenfunktion des Mesons nur linear auftritt.

Wilhelm Macke.

Wentzel, Gregor: μ -pair theories and the π -meson. Phys. Review, II. Ser. 79, 710—717 (1950).

Im Rahmen der μ -Mesonen-Paar-Theorie ist das π -Meson ein gebundener Zustand eines μ -Mesonenpaares. Die Wechselwirkung erfolgt über das Nukleonenfeld. Je nach der Form der Kopplung zwischen μ -Mesonen- und Nukleonen-Paaren ergeben sich verschiedene Typen von π -Mesonen. Es zeigt sich jedoch, daß nur für die pseudoskalare Kopplung, die entsprechend zu pseudoskalaren π -Mesonen führt, die Matrixelemente für die Streuung von μ -Mesonen an Nukleonen den experimentellen Ergebnissen entsprechend klein sind, während andere Matrixelemente groß werden, z. B. diejenigen, welche die Bindung eines μ -Paares zum π -Meson ermöglichen. Die Erzeugung von freien μ -Paaren beim Zusammenstoß hochenergetischer Nukleonen ist relativ unwahrscheinlich gegenüber der Erzeugung von π -Mesonen (gebundenen μ -Paaren). Es sei noch bemerkt, daß die durchgeführten Rechnungen nicht relativistisch sind; auftretende Divergenzen werden abgeschnitten.

Reinhard Oehme.

Espagnat, Bernard d': Sur la variance relativiste des mésons π . C. r. Acad. Sci., Paris 228, 744—746 (1949).

Diskussion der bekannten Formeln für die Lebensdauer der Prozesse $\pi \rightarrow \mu$ und $\pi \rightarrow e$ in Abhängigkeit von den teilweise bekannten Werten der Mesonenkonstanten. Eine Abschätzung ergibt, daß die vektorielle Mesonentheorie im Widerspruch zur Erfahrung den Zerfall in Elektronen bevorzugen würde; die skalare Theorie paßt sich jedoch den tatsächlichen Verhältnissen an. *Friedrich Leo Bauer.*

Petiau, Gérard: Sur la théorie de l'effet Compton généralisé des particules de spin $\frac{1}{2}$. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 2262—2264 (1950).

Es wird der Comptoneffekt eines Dirac-Teilchens vom Spin $\frac{1}{2}$ mit einem neutralen Teilchen (mit transversalen Wellen) vom Spin $\frac{1}{2}$, dessen Ruhmasse sich bei dem Prozeß ändern kann, diskutiert. Das einfallende und/oder das emittierte Teilchen kann somit Photon oder vektorielles Meson sein. Im Grenzfall ergibt sich Übereinstimmung mit der Formel von Klein-Nishina. *Friedrich Leo Bauer.*

Petiau, Gérard: Sur l'extension aux champs mésiques de la théorie de l'effet Compton. C. r. Acad. Sci., Paris 231, 119—122 (1950).

Der verallgemeinerte Comptoneffekt (s. vorsteh. Referat) ist ausgedehnt auf den Fall, daß das emittierte Meson nicht vom gleichen Typ ist wie das absorbierte.

Friedrich Leo Bauer.

Vrkljan, V. S.: Über die Beziehung der de Broglieschen Theorie der Teilchen mit irgendwelchem Spin und dem Theorem von Ehrenfest. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anzeiger 1950 (87), 13—18 (1950).

Es wird die naheliegende Vermutung bestätigt, daß nicht nur bei der Diracgleichung, sondern auch bei den Wellengleichungen für Teilchen beliebigen, nicht verschwindenden Spins der statische Schwerpunkt der Teilchen sich nicht nach der Newtonschen Dynamik bewegt, also auch im kräftefreien Fall i. a. keine geradlinige Bahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit beschreibt. *Friedrich Leo Bauer.*

Vrkljan, V. S.: Die de Brogliesche Theorie der Partikeln mit dem Spin 1 und die Schrödingerschen Oszillationen. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anzeiger 1950 (87), 253—261 (1950).

Nach dem Ergebnis der vorangehenden Arbeit wird gezeigt, daß insbesondere auch für Teilchen vom Spin 1 (Kemmergeleichungen) eine Schrödingersche Zitterbewegung vorliegt. *Friedrich Leo Bauer.*

Vrkljan, V. S.: Über das magnetische Moment des Mesons. II. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 31, 325—329 (1950).

Es wird ein Weg angegeben, wie man für die nach der de Broglieschen Fusionsmethode gewonnenen Wellengleichungen der Mesonen die zugehörigen Wellenfunktionen direkt berechnen kann. Verf. stützt sich dabei auf die Ergebnisse seiner früheren Arbeit (dies. Zbl. 35, 275), in der nach einer von Darwin angegebenen Methode Wellenpakete für Mesonen konstruiert wurden. *Erich Bagge.*

Peaslee, D. C.: Absolute selection rules for meson decay. Helvet. phys. Acta 23, 845—854 (1950).

Es werden allgemeine Auswahlregeln für den spontanen Zerfall eines Systems (Mesons) in verschiedene Endprodukte aufgestellt (dies. Zbl. 35, 136). Diese Regeln sind nur abhängig von den Transformationseigenschaften der Wellenfunktionen für die Anfangs- und Endzustände des betr. Systems, und nicht von der Form der Wechselwirkung. Im einzelnen ergibt sich (J = Gesamtdrehimpuls des Systems; Parität: $P = +1$ gerade, $P = -1$ ungerade): 1. Der 2γ -Zerfall ist verboten, wenn $J = 1$. 2. Der 2γ -Zerfall ist verboten, wenn J = ungerade und $P = -1$ (ungerade). 3. Beim 2γ -Zerfall sind die Photonen || polarisiert, wenn $P \cdot (-1)^J = +1$ und \perp wenn $P \cdot (-1)^J = -1$. 4. Der Zerfall in zwei Teilchen (a, b) mit Spin 0 ist nur möglich, wenn $P \cdot (-1)^J = P_a \cdot P_b$; bzw. wenn $P \cdot (-1)^J = +1$ bei identischen Teilchen. 5. Der Übergang in ein Photon und ein Spin 0-Teilchen ist verboten für $J = 0$. 6. Alle anderen Zerfallsprozesse sind im Prinzip möglich, vorausgesetzt daß die Gesamtzahl der ungeraden halbzahligen Spins in den Anfangs- und Endzuständen gerade ist. *Reinhard Oehme.*

Watson, Kenneth M. and Edward W. Hart: On the use of the Tomonaga intermediate coupling method in meson theory. Phys. Review, II. Ser. 79, 918—925 (1950).

Verff. geben eine einfache Formulierung der Tomonagaschen „intermediate coupling approximation“ für die Mesonentheorie und zeigen, daß diese in den Grenzfällen schwacher und starker Kopplung im allgemeinen zu richtigen Resultaten führt. Weiter werden das Problem der Kernkräfte und die Photo-Mesonenerzeugung für skalare und pseudoskalare geladene Mesonentheorien behandelt. Die Methode ist wesentlich begrenzt durch die Vernachlässigung des Nukleonen-Rückstoßes. *Reinhard Oehme.*

Serpe, J.: Sur la production de mésons par des photons. Physica 16, 890—894 (1950).

Verf. berechnet die Wirkungsquerschnitte für Mesonenerzeugung durch Photonenstöße an Kernen, die als Fermigas am absoluten Nullpunkt angesehen werden [s. u. a.: K. A. Brueckner, Phys. Review, II. Ser. 79, 641—650 (1950)]. Die Berücksichtigung des Pauliprinzipis ist wesentlich, um wenigstens qualitative Über-

instimmung mit den Experimenten von J. Steinberger und A. S. Bishop, Phys. Review, II. Ser. 78, 494 (1950) zu erhalten.

Detlof Lyons.

Vachaspati: Scattering of mesons by nuclear particles. Phys. Review, II. Ser. 0, 973—976 (1950).

Verf. vergleicht die klassischen Streuquerschnitte für (geladene, ungeladene sw.) Mesonen an Nukleonen (Dirac-Bhabha) mit den entsprechenden quantenmechanischen (Heitler-Peng) beim Grenzübergang $\hbar \rightarrow 0$ und findet Unstimmigkeiten, die für eine neue Theorie der Strahlungsdämpfung richtungsweisend sein könnten.

Detlof Lyons.

Rosenberg, R. L.: The loss of energy of slow negative mesons in matter. Phys. Mag., VII. Ser. 40, 759—769 (1949).

Die Bremsung schwererer geladener Teilchen (speziell negativer Mesonen) in Materie (Nichtmetallen) durch Ionisation wird für den Fall behandelt, daß die Geschwindigkeit des (leichtestgebundenen) Elektrons im Atom größer ist als die des bremsenden Teilchens. Dabei erlaubt die Methode von Mott [Proc. Cambridge Philos. Soc. 27, 553 (1931); dies. Zbl. 3, 37] durch Meidung der Bornschen Näherung die feineren Züge des Vorganges herauszuarbeiten.

Detlof Lyons.

Sachs, R. G. and L. L. Foldy: The scattering of gamma-rays by nucleons. Phys. Review, II. Ser. 80, 824—831 (1950).

Die Streuung von γ -Strahlen, deren Energie von der Größenordnung der Mesonenruhenenergie ist, an Nukleonen wird berechnet auf der Grundlage der symmetrischen skalaren und pseudoskalaren Mesonentheorie. Die Ergebnisse zeigen erhebliche Unterschiede zwischen beiden Theorien. So liefert die pseudoskalare Theorie unter anderem ein scharfes Resonanzmaximum bei der Ruhenergie der Mesonen, während die skalare Theorie zu einem glatten Verlauf des Wirkungsquerschnitts führt. Auch die Winkelverteilung fällt in beiden Fällen verschieden aus.

Wilhelm Macke.

Petiau, Gérard: Sur la théorie de la diffusion des particules de spin $\hbar/2$. C. r. Acad. Sci., Paris 231, 825—827 (1950).

Es wird der Wirkungsquerschnitt für die Streuung zweier Teilchen vom Spin $\frac{1}{2} \hbar$, die durch ein skalares, pseudoskalares oder vektorielles Mesonenfeld gekoppelt sind, berechnet (vgl. auch nachsteh. Referat).

Friedrich Leo Bauer.

Jean, Maurice et Jaques Prentki: La section efficace des collisions nucléon-nucléon dans la théorie super-multitemporelle (méson pseudo-scalaire). C. r. Acad. Sci., Paris 229, 171—173 (1949).

Unter Verwendung der neueren Schwinger-Dyson'schen Methode wurde der Wirkungsquerschnitt des Nukleon-Nukleon-Stoßes unter Zugrundelegung eines pseudoskalaren Kemmer-Mesonenfeldes (symmetrische Theorie) berechnet. In der Wechselwirkungs-Repräsentation läßt sich die S -Matrix und der Wirkungsquerschnitt in Bornscher Näherung leicht berechnen. Er ergibt sich stark ladungsabhängig.

Friedrich Leo Bauer.

Serpe, J.: Sur la théorie des particules de spin $1/2$. Bull. Soc. Sci. Liège 18, 266—271 (1949).

Majorana hat 1937 eine Verkürzung der Diracgleichung vorgeschlagen, die darin besteht, daß ladungskonjugierte Zustände identifiziert werden. Der Strom-Ladungsdichte-Vierervektor verschwindet dann identisch, ähnlich wie man es von der reellen, skalaren Schrödingergleichung kennt. Das bedeutet, daß die verkürzte Diracgleichung „unelektrische“ Teilchen beschreibt, die keine Ladung und kein magnetisches Moment in üblicher Auffassung besitzen. — Verf. weist darauf hin, daß solche Teilchen trotzdem aufeinander Wechselwirkungen ausüben können, etwa vermittelt gewisser „Mesonenladungen“. Ein entsprechender, passender Ansatz läßt auch in der verkürzten Theorie nicht-verschwindende Dichten der mesonischen Ladung stehen.

Friedrich Leo Bauer.

Bodiu, Georges: Démonstration géométrique des équations tensorielles du photon: complexité de la particule de spin égal à 1. C. r. Acad. Sci., Paris 231, 568—570 (1950).

Mit einer geometrischen Untersuchung im Rahmen der de Broglie-Cartanschen Spinorentheorie macht Verf. glaubhaft, daß keine mathematischen Schwierigkeiten einer Auffassung des Photons als komplexes Gebilde aus zwei Dirac-Teilchen entgegenstehen. Die physikalische Frage um die Erklärung der verschwindend kleinen Ruhmasse des Photons wird dabei nicht berührt. *Friedrich Leo Bauer.*

Hönl, Helmut und Hermann Boerner: Zur de Broglie'schen Theorie der Elementarteilchen. *Z. Naturforsch.* **5a**, 353—366 (1950).

Die Wellengleichung zum Spin $3/2\hbar$, die man auf der dritten Stufe der de Broglieschen Verschmelzungsmethode erhält, läßt sich noch in vollständig voneinander unabhängige Teilsysteme trennen. Während man zur Ausreduktion sonst den Zusammenhang mit der Darstellungstheorie der fünf-dimensionalen Drehgruppe benützt, wird sie bei den Verff. auf rein algebraischem Weg durchgeführt. Für den Einzelfall ist dies der kürzeste Weg. — Einer Übertragung des Verfahrens auf höhere Verschmelzungsstufen stellen sich jedoch in zunehmendem Maße praktische Schwierigkeiten entgegen. Demgegenüber liefert die gruppentheoretische Methode die Ausreduktion allgemein in der Form von Symmetrie- und Spurbedingungen für alle Verschmelzungsstufen. — Verff. diskutieren abschließend das magnetische Moment des Spin- $3/2$ -Teilchen. Keiner der sich ergebenden Werte paßt zu dem magnetischen Moment des Protons. Da aber dieses weitgehend von inneren Mesonenprozessen her beeinflußt sein kann, ist die Zulässigkeit der Bhabhaschen Hypothese einer Zuordnung des Protons zu einer Spin- $3/2$ -Wellengleichung damit nicht entscheidbar. *Friedrich Leo Bauer.*

Wet, J. S. de: A note on the relativistic invariance of quantized field theories. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **46**, 316—318 (1950).

In einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **33**, 42) wurden für allgemeine lineare Feldtheorien (Feldgleichungen beliebig hoher Ordnung) die Vertauschungsrelationen in einer Form geschrieben, die kovariant gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen ist. In der vorliegenden Note wird ein einfacher Beweis für die Kovarianz der Vertauschungsrelationen und ihre Verträglichkeit mit den Feldgleichungen gegeben, dessen Gültigkeit nicht auf lineare Theorien beschränkt ist. Die Antikommutatorrelationen für Teilchen mit Fermi-Statistik sind allerdings — wie bekannt — nur mit einer speziellen Klasse von Feldgleichungen verträglich. *Haag.*

Reulos, René: Sur la masse des corpuscules magnétiques. *J. Physique Radium* **11**, 47 S — 49 S (1950).

Verf. ist der Ansicht, das magnetische Moment des Elektrons und des Nukleons sei nur durch magnetische Partikel zu erklären. Er führt ein dem Yukawa-Potential analoges Dipol-Potential ein, das zu einem „magnetischen Meson“ führt. *Friedrich Leo Bauer.*

● **Halliday, David:** Introductory nuclear physics. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1950. 558 p. 282 figs. \$ 6,50.

● **Bitter, Francis:** Nuclear physics. A text book. (Principles of Physics Series.) Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Press, Inc., 1950. 200 p., illustrated. \$ 5,50.

Das Buch enthält eine geschlossene Einführung in die Kernphysik und berücksichtigt vornehmlich die experimentellen Belange, vermischt mit den einfacheren theoretischen Gesichtspunkten. Besonders angenehm empfindet der Leser die Übersichtlichkeit in der Gesamtanlage des Werks wie auch im einzelnen bei der Darstellung. Der Anfänger wird sich verhältnismäßig leicht einen Überblick über das Gesamtgebiet verschaffen können, während die Tabellen durch ihre zweckmäßige Anordnung auch dem Fortgeschrittenen durch ihre Zugänglichkeit gute Dienste leisten. Nach einem einleitenden historischen Überblick folgt eine Zusammenstellung der benötigten allgemeinen Grundlagen. Ein Kapitel über Atomhülle und Strahlung schließt sich an. Weiter folgen die wichtigsten Kapitel 4—8 über Neutronen, Kerneigenschaften, Kernbeschuß, Radioaktivität und Kernreaktionen. Ein kurzes Kapitel über Kerntechnik schließt die Darstellung ab. *Wilhelm Macke.*

Breit, G. and W. G. Bouricius: Boundary conditions and range of force for S state of two protons. *Phys. Review*, II. Ser. **75**, 1029—1050 (1949).

Es wird die Frage untersucht, ob es möglich ist, die Beschreibung der Wechselwirkung zweier Protonen durch ein ortsabhängiges Potential zu umgehen durch bestimmte Forderungen an den Verlauf der Wellenfunktion dieser Teilchen im Bereiche der Kernkraftreichweiten. Diese Untersuchung wird durch die Feststellung nahegelegt, daß sehr verschiedenartige Potentialverläufe zu sehr ähnlichen Aussagen über die möglichen Streuergebnisse von Protonen an Protonen führen. Es ergibt sich, daß man die gewöhnliche Potentialkurve zwischen beiden Teilchen durch die Forderung an die Wellenfunktion ersetzen kann, die logarithmische Ableitung an der Stelle $r = 0,47 \, e^2/mc^2$ habe einen energieunabhängigen Wert. Diese reicht aus, um die Ergebnisse von Streurechnungen mit den Beobachtungen zur Übereinstimmung zu bringen. Die Erfüllung der oben formulierten Anschlußbedingung für die Wellenfunktion bei r führt bei der Rechnung unmittelbar zur Feststellung der Phasenverschiebungen für die Streuwellen.

Erich Bagge.

Krook, M.: Continuous γ -emission in neutron-proton collisions. Proc. phys. Soc., Sect. A **62**, 19—26 (1949).

Es werden die Wirkungsquerschnitte für die Erzeugung von Bremsstrahlung bei Neutron-Proton-Stößen berechnet. Für die Wechselwirkung der Nukleonen werden dabei Kernkräfte vom Heisenberg-Majorana-Typ angesetzt und sowohl die elektrischen wie die magnetischen Dipolübergänge berücksichtigt. Bis zu Energien der stoßenden Nukleonen von etwa 20 MeV liegen die Wirkungsquerschnitte im Bereich von 10^{-28} bis 10^{-29} cm^2 d. h., daß im Mittel auf rund 10000 elastische Neutron-Protonstöße 1 unelastischer kommt. Die berechneten Effekte liegen im angegebenen Energiebereich unterhalb der laboratoriumsmäßig zur Zeit erfaßbaren Beobachtungsschwelle.

Erich Bagge.

Basu, D.: Relativistic scattering of neutrons by protons. Proc. Roy. Irish. Acad., Sect. A **52**, 127—141 (1949).

Die symmetrische Kombination der vektoriellen und der pseudoskalaren Mesonentheorie wird benutzt, um damit die Streuung von Neutronen an Protonen im Bereiche extrem hoher Energien zu berechnen. Die Erweiterung der Wirkungsquerschnitte erfolgt in diesem relativistischen Energiegebiet nach der Bornschen Methode, die oberhalb von 50—100 MeV anwendbar ist. Die Rechnungen zeigen, daß die Wirkungsquerschnitte bei sehr hohen Energien konstant sind, wenn durch Einfügung entsprechender Terme in die Lagrangefunktionen der Mesonenfelder dafür gesorgt ist, daß keine δ -funktionsartigen Kontaktpotentiale für die Wechselwirkungen der Nukleonen auftreten. Auf welchem Wege dies möglich ist, wird in der Arbeit gezeigt. Die obige Aussage gilt allerdings nur dann, wenn die Lagrangefunktionen nur Glieder enthalten, in denen die mesonische Ladung der Nukleonen für das Zustandekommen der Streuprozesse verantwortlich ist, nicht aber mesonische Dipolwechselwirkungen. Die letzteren führen im allgemeinen zu Wirkungsquerschnitten, die mit wachsender Energie beliebig ansteigen, was nicht sein kann. Es wird vermutet, daß die Theorie der Strahlungsdämpfung diese Schwierigkeit zu beheben gestattet. Am Schluß der Arbeit werden die verschiedenen Wirkungsquerschnitte für die vektorielle und die pseudoskalare Theorie, jede einmal mit und dann ohne δ -funktionenartige Kontaktpotentiale und getrennt nach Beiträgen von monopol- und dipolartigen Termen in den entsprechenden Lagrangefunktionen, in übersichtlicher Form zusammengestellt.

Erich Bagge.

Hu, Tsi-Ming and H. S. W. Massey: Non-central interactions between neutron and proton. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **196**, 125—159 (1949).

In Erweiterung eines schon im Jahre 1941 von Rarita und Schwinger (dies. Zbl. **25**, 41, 26, 384) durchgeführten Programms untersuchen Verff., wie die Konstanten des Wechselwirkungspotentials zwischen Neutron und Proton einzurichten sind, um gleichzeitig die folgenden empirischen Daten richtig beschreiben zu können: Magnetisches Moment des Deuterons, Neutron-Protonstreuung zwischen 1—6 MeV, Streuung langsamer Neutronen in Ortho- und Parawasserstoff, Beugung langsamer Neutronen in festem Wasserstoff, Wirkungsquerschnitt für den Photoeffekt des Deuterons, Proton-Protonstreuung und Bindungsenergie des Tritons. Als Ausdruck für die Wechselwirkung dieser Teilchen setzen sie das Potential an:

$$V_{np} = \left\{ -\frac{1}{2} \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 \right. \left. - \frac{1}{2} (1 + \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2) \right\} \cdot \left\{ -\frac{\hbar^2 a}{M r_0^2} \left[1 + \frac{g}{2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 - 1) + \gamma \left(\frac{3\vec{\sigma}_1 r}{r^2} (\vec{\sigma}_2 r) - (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) \right) \right] \right\} V \frac{r}{r_0}.$$

Hierbei sind $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$ die Spin- und Ladungsoperatoren, r der Abstand der beiden Nukleonen. Bei den Rechnungen wird die Kraftreichweite r_0 in der Gestaltfunktion für die Ortsabhängigkeit des Wechselwirkungspotentials $V(r/r_0)$ (rechteckiger Topf, bzw. einfache Exponentialfunktion, bzw. Yukawas Form) vorgegeben und dann die noch freibleibenden Konstanten a, g und γ so

bestimmt, daß die oben angegebenen empirischen Daten durch die Theorie wiedergegeben werden, was praktisch für jede der neun möglichen Potentialkombinationen des obigen Ausdrucks gelingt. Die zugehörigen Konstantensätze werden in Form einer Tabelle mitgeteilt. Es ergeben sich keine Gesichtspunkte, die einen dieser Sätze vor den anderen besonders auszeichnen, so daß eine Entscheidung zugunsten eines von ihnen nicht möglich ist. *Erich Bagge.*

Peng, H. W. and M. Y. Tang: On the binding energies of the atomic nuclei ${}^2\text{H}$, ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ and ${}^4\text{He}$. I. Chinese J. Phys. 7, 316—323 (1950).

King, Sing-Nan, Chi-Heng Chang and M. Y. Tang: On the binding energies of the atomic nuclei ${}^2\text{H}$, ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ and ${}^4\text{He}$. II. Chinese J. Phys. 7, 331—338 (1950).

Chang, Chi-Heng and H. W. Peng: On the binding energies of the atomic nuclei ${}^2\text{H}$, ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ and ${}^4\text{He}$. III. Chinese J. Phys. 7, 348—361 (1950).

I. Es werden die Bindungsenergien der Kerne ${}^2\text{H}$, ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ und ${}^4\text{He}$ nach der Variationsmethode berechnet, und zwar unter Zugrundelegung des Möller-Rosenfeld-Potentials. Die Übereinstimmung mit den Experimenten ist ganz gut für ${}^2\text{H}$ und ${}^3\text{He}$, während die berechneten Bindungsenergien für ${}^3\text{He}$ und ${}^3\text{H}$ zu groß sind. — II. Verf. zeigen, daß sich die Diskrepanzen zwischen den gemessenen und den in Teil I berechneten Bindungsenergien von ${}^3\text{H}$ und ${}^4\text{He}$ nicht durch eine genauere Approximation der Wellenfunktionen beheben lassen. — III. Die Bindungsenergien der Kerne ${}^2\text{H}$, ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ und ${}^4\text{He}$ werden hier mittels eines auf der Mesonentheorie basierenden Kernpotentials betrachtet. Dieses Potential entspricht nicht der symmetrischen Theorie, so daß die Kernkräfte nicht mehr ladungsunabhängig sind. Es wird versucht, die in dem Potentialansatz eingehenden Konstanten auf Grund der gemessenen Bindungsenergie festzulegen. *Reinhard Oehme.*

Racah, Giulio: Nuclear coupling and shell Model. Phys. Review, II. Ser. 78, 622—623 (1950).

Auf Grund des Diracschen Vektor-Modells wird die von Feenberg [Phys. Review, II. Ser. 76, 1275 (1949)] aufgestellte Behauptung bewiesen, daß das statische Gewicht der Singulett-Komponente für Zustände im antimetrischen j^2 -Funktions-Raum maximal wird für $J = 0$. Diese Betrachtungen werden dann ausgedehnt auf den antimetrischen j^n -Funktions-Raum, d. h. für n gleiche Teilchen in äquivalenten Bahnen. *Reinhard Oehme.*

Boer, Jan de et Sybren R. de Groot: Sur le mécanisme des deux modes de tripartition des noyaux lourds. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 119—121 (1948).

Bei der Dreiteilung der durch Neutronenbeschuß gespaltenen Kerne werden zwei Reichweitengruppen der leichtesten Kernbruchstücke beobachtet ($R \leq 3$ cm und 10 cm $\leq R \leq 45$ cm). Die Ursache dieser Erscheinung wurde von Tsien [Phys. Review, II. Ser. 72, 1257 (1941)] im Rahmen des Tröpfchenmodells der Atomkerne gedeutet, wobei allerdings die dort angenommenen Modellvorstellungen nicht weiter begründet werden konnten. In der vorliegenden Notiz wird darauf hingewiesen, daß sich quantenmechanisch eine Deutungsmöglichkeit für die letzteren ergibt, wenn man annimmt, daß sich der leichteste der drei Kernbestandteile im Augenblick der Abschnürung etwa symmetrisch zwischen den beiden schweren Kernbruchstücken befindet. Er findet in diesem Bereiche ein vorwiegend durch die Coulombkräfte erzeugtes und näherungsweise parabolisch verlaufendes Potential vor, in dem sich verschiedene Anregungszustände ausbilden können. Die beiden tiefsten liegen bei 1,6 und 4,8 MeV, deren Energieunterschied etwa den beiden beobachteten Reichweiten entsprechen könnte. *Erich Bagge.*

Schlögl, Friedrich: Berechnung einiger Wirkungsquerschnitte am Beryllium. Z. Naturforsch. 3a, 229—240 (1948).

Für den Berylliumkern wird ein vereinfachtes Zweikörpermodell entwickelt, das sich durch einen kugelsymmetrischen Rumpfkern aus zwei α -Teilchen und einem locker daran gebundenen Neutron charakterisieren läßt. Für dieses werden die Wirkungsquerschnitte für den Kernphotoeffekt, die Neutronenstreuung und die $(n, 2n)$ -Neutronenablösung nach den Methoden der Störungsrechnung ermittelt. Im Falle des Kernphotoeffektes ergibt sich Übereinstimmung mit der Erfahrung und die richtige Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts, wenn man annimmt, daß der Grundzustand des Be-Kerns ein P -Zustand ist. Für den Streuquerschnitt ist die Größenordnung noch die richtige, während der Verf.

für die Neutronenablösung einen um eine Größenordnung zu kleinen Wirkungsquerschnitt erhält.

Erich Bagge.

Tousehek, B. F.: An estimate for the position of the lowest dipole-level of a nucleus. *Philos. Mag., VII. Ser. 41*, 849—851 (1950).

Es wird eine Ungleichung abgeleitet für die Lage des ersten angeregten Zustandes eines Kernes, der vom Grundzustand aus durch einen Dipolübergang erreichbar ist. Diese Ungleichung bekommt man auf Grund der Vollständigkeit des Systems der Kerneigenfunktionen.

Reinhard Oehme.

Gething, P. J. D.: A critical examination of the gravitational theory of the origin of cosmic rays. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 204*, 278—294 (1950).

In einer einleitenden Übersicht werden die bis zum Frühjahr 1950 erschienenen Theorien über den Ursprung der kosmischen Ultrastrahlung kritisch diskutiert, wobei sich Verf. allerdings auf die in englischer Sprache publizierten Arbeiten beschränkt. Sodann entwickelt er im Anschluß an eine ältere Theorie von Milne (1935) und im Rahmen von dessen kinematischer Kosmologie eine Theorie der Entstehung energiereicher Ultrastrahlen durch die Wirkungen der Weltgravitation. Die schon 1936 von Blackett gegebenen allgemeinen Argumente gegen Theorien dieser Art versucht er mit dem Hinweis zu entkräften, daß die elektrodynamische Seite der Ultrastrahlungsphänomene, z. B. das positive Ladungsvorzeichen der Primärpartikel, durch sekundäre Mechanismen erzeugt sein kann. — Er zeigt, daß das beobachtete Potenzgesetz für die Energieverteilung der Primärteilchen sich aus einer solchen Theorie ableiten läßt und etwa den richtigen Wert für den entsprechenden Exponenten liefern kann. Hinsichtlich der zu erwartenden Absolutintensität erlaubt die Theorie keine Aussagen. Dieser Punkt spielt allerdings bei den meisten der neueren Theorien für die Entstehung der Ultrastrahlung eine ganz wesentliche Rolle.

Erich Bagge.

Bernstein, I. B.: Improved calculations on cascade shower theory. *Phys. Review, II. Ser. 80*, 995—1005 (1950).

Die Korrektur, die an den Lösungen der üblichen Diffusionsgleichungen der Schauertheorie angebracht werden müssen, um der unvollständigen Abschirmung der Elektronen im Atom Rechnung zu tragen (in den Ausdrücken für die Wirkungsquerschnitte für die Strahlungsprozesse), ist, wie Verf. zeigt, größer als man bisher angenommen hatte und muß bei Diskussion der Experimente durchaus berücksichtigt werden. Bei dem hier entwickelten Störungsverfahren, das zur numerischen Auswertung besonders geeignet ist, wird als nullte Näherung die als bekannt vorausgesetzte Lösung bei „vollständiger Abschirmung“ genommen.

Detlof Lyons.

Cave, L., J. Corner and R. H. A. Liston: The scattering of gamma-rays in extended media. I. Perpendicular incidence on a plane slab. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 204*, 223—259 (1950).

Das Problem der Vielfachstreuung von γ -Quanten, die senkrecht auf eine ebene Platte fallen, wird mittels verschiedener theoretischer Methoden behandelt. Es wird nur der Compton-Effekt betrachtet und zwar unter Vernachlässigung von Polarisierungseffekten der Streustrahlung. Eine exakte Lösung liegt nicht vor, aber man kann diese einschließen zwischen einer theoretischen oberen Grenze für die Dosis hinter der Platte und Näherungslösungen zunehmender Genauigkeit, von denen man weiß, daß sie eine zu kleine Dosis ergeben.

Reinhard Oehme.

Corner, J. and R. H. A. Liston: The scattering of gamma-rays in extended media. II. Back-scattering of gamma-rays from a thick slab. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 204*, 323—329 (1950).

Für die Bestrahlung einer dicken Platte mit γ -Strahlen von 250 keV bis 3 MeV wird die Dosis berechnet, die man durch Rückstreuung an der Oberfläche der Platte bekommt, und zwar für alle Einfallrichtungen des primären Strahles zwischen 0° und 90° . Weiter werden Resultate angegeben für die Rückstreuung in einer rechtwinkligen Ecke und an einer Halbebene, deren Kante gegeben ist durch die Schnittlinie der Plattenebene und der dazu senkrechten Ebene durch den Punkt, an dem die Rückstreuung gemessen wird.

Reinhard Oehme.

Corner, J., F. A. G. Day and R. E. Weir: The scattering of gamma-rays in extended media. III. Problems with spherical symmetry. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 204, 329—338 (1950).

Verff. behandeln im Anschluß an die Arbeiten I und II (s. vorsteh. Referate) einige typische Probleme der Fortpflanzung von γ -Strahlung in ausgedehnten Medien, und zwar nur unter Berücksichtigung der Compton-Streuung. Dies ist für γ -Energien von etwa 200 keV bis zu einigen MeV eine recht gute Näherung.

Reinhard Oehme.

Jánossy, L.: On the absorption of a nucleon cascade. Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 53, 181—188 (1950).

In einer früheren Arbeit des Verf. [Heitler u. Jánossy, Proc. phys. Soc., Sect. A 62, 374—385 (1949)] wurde die Absorption von Nukleonen in homogener Materie behandelt unter der gewöhnlich gemachten Annahme, daß der W. Q. für Energieverlust der Nukleonen nur von der relativen Energie abhängt. Der Übergang zur wirklichen Materie mit diskret verteilten Atomkernen wurde ferner durch die Konzeption der freien Weglänge durch geeignete Mittelung über die Wege der Kernteilchen vollzogen. Es ergaben sich nun einfache Beziehungen für die Wahrscheinlichkeitskoeffizienten, die sich, wie in der gegenwärtigen Arbeit gezeigt wird, auch auf den Fall von Nukleonen-Kaskaden anwenden lassen, wenn geeignete Mittelwertbildungen über die Nukleonenwege vorgenommen werden. Formal entstehen dabei keine Schwierigkeiten, nur die numerischen Auswertungen bleiben einer späteren Arbeit des Verf. vorbehalten.

Detlof Lyons.

Bethe, H. A., L. M. Brown and M. C. Walske: Stopping power of K-electrons. Phys. Review, II. Ser. 79, 413 (1950).

In der Formel für die Bremsung durch Ionisation der K-Schale [s. Livingston und Bethe, Reviews modern Phys. 9, 264 (1937)] steht als Faktor des Logarithmus ein Ausdruck, der durch die Oszillatorenstärke bestimmt ist und der nur gilt, wenn die Oszillatorenstärke pro Elektron nahezu Eins ist. Für die Anwendung auf höhere Schalen geben Verff. eine geeignete Korrektur an.

Detlof Lyons.

Bau der Materie:

Yang, L. M.: Kinetic theory of diffusion in gases and liquids. II. General kinetic theory of liquids mixtures. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 198, 471—492 (1949).

[Teil I. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 198, 94—166 (1948).] Frühere Betrachtungen über die Theorie der Transportvorgänge in Flüssigkeiten (Born u. Green, dies. Zbl. 30, 430) werden auf binäre Gemische erweitert. Gemäß den Grundlagen der Born-Greenschen Methode werden zunächst die der Boltzmannschen Fundamentalgleichung entsprechende Beziehung und die zugehörigen Erhaltungsgleichungen aufgestellt. Diese Beziehung bedarf aber noch der Ergänzung durch eine statistisches Prinzip. Als solches dient die Annahme, daß die allgemeine Wechselwirkung zu betrachten sei als binäre Wechselwirkung (wie im Gas), überlagert von einem zusätzlichen starren Potential, das dem gleichzeitigen Einfluß weiterer Moleküle Rechnung trägt. Letzteres Potential wird aus der Verteilungsfunktion des thermischen Gleichgewichts entnommen. Es ist dann möglich, allgemeine Ausdrücke aufzustellen für die Transportkoeffizienten, insbesondere die Koeffizienten der gewöhnlichen und thermischen Diffusion. Ludwig Waldmann.

Green, H. S.: A general kinetic theory of liquids. V. Liquid He II. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 194, 244—258 (1948).

In vorangehenden Arbeiten [I. Born und Green, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 188, 10—18 (1946); II. Green, dies. Zbl. 30, 429; III. IV. Born und Green, dies. Zbl. 30, 430] wurde eine exakte kinetische Theorie der Flüssigkeiten entwickelt, zunächst auf klassisch-mechanischer (III.) und später auf quantenmechanischer Grundlage (IV.). Die quantenmechanische Theorie zeigt, daß zwar die bekannten phänomenologischen Gesetze für Reibung und Wärmeleitung formal weiterbestehen, jedoch eine neue Interpretation erfahren müssen. Es treten nämlich in ihnen an Stelle der geläufigen thermodynamischen Größen Temperatur und Druck eine „kinetische Temperatur“ und ein „kinetischer Druck“, welche sich bei tiefen Temperaturen, unterhalb der λ -Temperatur des He, wesentlich von den thermodynamischen Größen unterscheiden. Dieser Unterschied wird verantwortlich gemacht für die charakteristischen Phänomene des He II, nämlich dessen „Superflüssigkeit“ (Daunt und Mendelssohn 1939),

den thermomechanischen Effekt (Kapitza 1941) und die Wärmewellen (Peschkow 1944). Der Vergleich der neuen Theorie mit früheren theoretischen Ansätzen (London, Tisza, Landau) wird durchgeführt.

Ludwig Waldmann.

Rodriguez, A. E.: A general kinetic theory of liquids. VI. The equation of state. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 196, 73—92 (1949).

In einer früheren Arbeit dieser Serie (dies. Zbl. 30, 429) wurde die von Born und Green entwickelte kinetische Theorie der Flüssigkeiten bereits auf das thermische Gleichgewicht angewandt. Vorliegende Arbeit setzt diese Diskussion fort und behandelt insbesondere den Übergang Gas \leftrightarrow Flüssigkeit. Es ergibt sich eine Isotherme vom van-der-Waals-Typus, welche erst durch Zuhilfenahme der Maxwell'schen Konstruktion zur Koexistenzgeraden führt. Das ist also anders als nach Montroll und Mayer [J. chem. phys. 9, 626 (1941)], welche Autoren von dem Gibbsschen Phasenintegral für das Gesamtsystem ausgehen und direkt die koexistierenden Phasen erhalten. Rodriguez übt daran Kritik. (Doch kann man deren Berechtigung bezweifeln. Die Born-Greensche Theorie geht ja nur bis zu Dreierstößen und es ist nicht gesagt, daß diese bereits zur Koexistenz führen. Ann. d. Ref.). Schließlich wird die kritische Temperatur für Argon unter Annahme eines Lennard-Jones-Potentials berechnet und gute Übereinstimmung mit dem Meßwert erzielt.

Ludwig Waldmann.

London, F. and P. R. Zilsel: Heat transfer in liquid helium II by interal convection. Phys. Review, II. Ser. 74, 1148—1156 (1948).

Tiszas Theorie des He II [Nature 141, 913 (1938)] beruht auf der Annahme, daß dieses ein Gemisch zweier Flüssigkeiten ist, des normalen und des superflüssigen Heliums. Diese Theorie erklärt, daß bei Strömung durch eine feine Kapillare praktisch keine Viskosität zu beobachten ist, dagegen eine schwingende Platte, die in He II taucht, eine merkliche Reibung erfährt. Die Theorie sagte ferner voraus, daß der Wärmestrom durch eine feine Kapillare proportional dem Temperaturgefälle sein sollte. Dies konnte für sehr feine Kapillare von Keesom und Duyckaerts [Physica 13, 153 (1947)] nun experimentell verifiziert werden. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß aber quantitativ keinerlei Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment besteht. Änderungsvorschläge für die Theorie werden gemacht.

Ludwig Waldmann.

● Chalmers, Bruce (edited by): Progress in metal physics, 2. London: Butterworths Scientific Publications, Ltd., 1950. VIII, 213 p., 23 plates. 45 s.

Wohlfahrt, E. P.: Limitations of the Bloch spin-wave treatment of ferromagnetism. Proc. Leeds philos. lit. Soc., sci. Sect. 5, 213—223 (1949).

Loja, M. V.: Der Zusammenhang der kombinierten Lichtstreuung mit dem Kerreffekt. Akad. Nauk Latvijos SSR, Trudy Inst. Fiz. Mat. 1, 5—20 (1950) [Russisch].

Loja, M. V.: Der Zusammenhang der kombinierten Lichtstreuung mit der Photoelastizität bei akustischen Schwingungen. Akad. Nauk Latvijos SSR, Trudy Inst. Fiz. Mat. 1, 21—25 (1950) [Russisch].

Sanadze, V. V. und G. S. Ždanov: Ein Spezialfall der direkten Methode der Röntgenstrukturanalyse. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 73, 111—112 (1950) [Russisch].

Gegeben sei eine zentrosymmetrische Kristallstruktur, welche z. B. aus zwei schweren Atomen T und T' (mit den Gewichten t) besteht, um die herum k leichte Atome 1, 2, ..., k (mit den Gewichten l) angeordnet sind. Das entstehende Vektormodell (= Pattersondiagramm) weist neben dem Maximum am Nullpunkt drei Systeme von Maxima auf: das Untersystem der Hauptmaxima τ mit den Gewichten t^2 , dasjenige der mittleren Maxima λ mit den Gewichten tl und dasjenige der schwachen Maxima mit den Gewichten l^2 , das im weiteren vernachlässigt wird. — Jedes Vektormodell ist an sich zentrosymmetrisch. Dasjenige einer zentrosymmetrischen Kristallstruktur weist außerdem noch eine große Zahl von Pseudosymmetriezentren auf. Sie befinden sich in den Mitten eines jeden der interatomaren Vektoren, die die Paare der zentrosymmetrischen Atome verbinden. Die bezüglich eines Pseudozentrums symmetrischen Maxima des Vektormodells liefern die Maxima der Atomkonfiguration. Das Vorhandensein einer großen Anzahl von Pseudozentren kompliziert die Ermittlung der Atomkonfigurationen. Die Einführung von schweren Atomen in die Struktur hebt einige vorherrschende Systeme von Pseudozentren hervor, in bezug auf die die Gruppen des symmetrischen Maxima des Vektormodells gefunden und folglich die Koordinaten der Atome bestimmt werden können. (Nach deutscher Übersetzung referiert.)

Werner Nowacki.

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

Huang, Su-Shu: A note on the mean square velocity in stellar statistics. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **36**, 67—72 (1950).

Es wird gezeigt, wie die mittleren Geschwindigkeitsquadrate in drei vorgegebenen zueinander senkrechten Richtungen in mittlere Geschwindigkeitsquadrate eines beliebigen anderen Orthogonalsystems übergeführt werden können, wenn die Bedingungen $u_i u_j = 0$ für $i \neq j$ erfüllt sind. Walter Fricke.

Wähnl, Maria: Eine theoretische Untersuchung zur Entstehungshypothese der Sternhaufen. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-B., IIa **158**, 227—259 (1950).

Die Untersuchung basiert auf der Hypothese, daß Sternhaufen (Kugelsternhaufen oder offene Haufen) aus sternleerem Raum in ein größeres Sternsystem eindringen und die Bahnkurven der Sterne im Haufen störenden Kräften des Sternsystems ausgesetzt sind. Die Störungen bewirken eine Auflockerung beziehungsweise Auflösung des Sternhaufens. Quantitativ durchgerechnet wird der Fall, daß ein Doppelstern in einen Sternhaufen eindringt, dessen Gesamtmasse und Dichteverteilung vorgegeben wird. Ermittelt wird die Änderung der großen Halbachse und Exzentrizität der Doppelsternbahn unter dem Einfluß des Potentialfelds im Haufen (ohne Berücksichtigung der Sternpassagen). Die Überlegungen werden auf den Fall übertragen, daß ein Sternhaufen in das Milchstraßensystem eindringt. W. Fricke.

Camm, G. L.: Self-gravitating star systems. *Monthly Not. Roy. astron. Soc.* **110**, 305—324 (1950).

Es werden simultane Lösungen der Boltzmannschen und Poissonschen Gleichung gesucht für die Geschwindigkeitsverteilung, die Dichte und das Potential in einem stationären System gravitierender Massenpunkte, in dem die Flächen gleicher Dichte parallele Ebenen sind. — Die erste Lösung wird erzielt durch die Annahme, daß die Verteilungsfunktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten $f(z, w)$ [z = räuml. Koord., w = Geschwindigkeit] eine Separation der Variablen zuläßt. Die Lösung ist eine isotherme Verteilung. Eine zweite Lösung wird erzielt durch die Annahme, daß $f(z, w)$ eine Separation von der Form $f = Z(z) \cdot Q(q)$ mit $q = w \cdot s(z)$ zuläßt. Wie im ersten Fall ergibt sich eine bis ins Unendliche erstreckte Verteilung. Die dritte Lösung, die unter der Annahme beschränkter Geschwindigkeitskomponenten w erzielt wird, ergibt eine adiabatische Verteilung. Die drei Lösungen werden herangezogen zu einem Vergleich mit der beobachteten Dichteverteilung der Sterne senkrecht zur Milchstraßenebene. W. Fricke.

Dirikis, M. (M. A. Dirikis): Vorausberechnung des Zeitpunktes der Opposition eines kleinen Planeten. *Akad. Nauk Latvvijskoj SSR, Trudy Inst. Fiz. Mat.* **1**, 109—117 (1950) [Russisch].

Dirikis, M. (M. A. Dirikis): Über die Berechnung der Schwankungen in Ephe-
meriden der kleinen Planeten. *Akad. Nauk Latvvijskoj SSR, Trudy Inst. Fiz. Mat.* **1**, 125—128 (1950) [Russisch].

Öpik, E. J.: Transport of heat and matter by convection in stars. *Monthly Not. Roy. astron. Soc.* **110**, 559—589 (1950).

Unno, Wasaburo: On the radiation pressure in a planetary nebula. I. *Proc. Japan Acad.* **26**, Nr. 6, 17—22 (1950).

Der Strahlungsdruck der L_α -Strahlung in einem planetarischen Nebel wird diskutiert. Zanstras Theorie der Streuung „with redistribution“ [*Bull. astr. Netherland.* **11**, No. 401, 1 (1949)] wird dabei zur Anwendung gebracht. Es wird eine strengere Lösung der bei Berücksichtigung des „redistribution“-Mechanismus geltenden Transportgleichung für L_α -Strahlung gefunden, aber das Ergebnis ist ungefähr dasselbe wie das, zu dem bereits Zanstra gekommen ist. Der Strahlungsdruck

der L_α -Strahlung wird jedenfalls bei Berücksichtigung der Zanstraschen Streuungstheorie so stark reduziert, daß die Diskrepanz zwischen Theorie und Beobachtung hinsichtlich der Ausdehnungsgeschwindigkeit eines planetarischen Nebels, wie sie sich bei der Ambarzumianschen Theorie [Monthly Notices 93, 50—61 (1932)] ergeben hat, nicht mehr besteht.

H. Vogt.

Biberman, L. M.: Über die Gleichungen des Strahlungstransportes in Sternatmosphären. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 67, 443—445 (1949) [Russisch].

Es wird eine Integrodifferentialgleichung für den Strahlungstransport mit Berücksichtigung der inkohärenten Streuung abgeleitet. Die Begründung der angegebenen Formeln ist dem Ref. nicht verständlich. (Nach Übersetzung referiert.)

Gerd Burkhardt.

Sobolev, V. V.: Zum Problem der diffusen Reflexion und Transmission des Lichtes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 69, 547—550 (1949) [Russisch].

Es wird die Zerstreuung des Lichtes zunächst in einem unendlich ausgedehnten, dann auch in einem — z. B. von einer Ebene mit bestimmtem Albedo — begrenzten trüben Medium untersucht. Zunächst wird isotrope Streuung, dann auch eine Indicatrix $\sim 1 + x_1 \cos \gamma$ (γ = Streuwinkel) betrachtet. Die in W. A. Ambarzumians Behandlung dieser Probleme auftretenden Hilfsfunktionen lassen sich aus einer Integralgleichung ermitteln, die für das unendlich ausgedehnte Medium nach einer Methode von Carleman, im allgemeinen Fall numerisch gelöst werden kann.

A. Unsöld.

Krat, V.: Die elektrischen Ladungen in der Sonnencorona. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 61, 31—34 (1948) [Russisch].

In Fortsetzung früherer Untersuchungen von Jeans und Milne wird der elektrische Ladungszustand der Sonne und die Verteilung der freien Ladung in der Sonnenkorona untersucht.

Ludwig Biermann.

Sweet, P. A.: The importance of rotation in stellar evolution. Monthly Not. Roy. astron. Soc. 110, 548—558 (1950).

Huber, A.: Elektrische Ströme in stetig geschichteten Medien. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. IIa 159, 71—82 (1950).

Zur Erforschung der lokalen Struktur der Erdrinde werden in der Geophysik Widerstandsmessungen an Erdströmen benutzt. Zur Auswertung dieser Messungen dienen berechnete Vergleichsmodelle für verschiedene Annahmen der Variation der Leitfähigkeit mit der Tiefe. Bei der Berechnung dieser Modelle handelt es sich um Randwertaufgaben, deren wesentlicher Teil die Berechnung des Potentials einer in der Erdoberfläche gelegenen Punktquelle an der Erdoberfläche ist. Zunächst wird ein Modell behandelt, bei dem der spezifische elektrische Widerstand bis zu einer festgesetzten Tiefe exponentiell zunimmt, dort einen Sprung macht, und weiterhin konstant bleibt. Als zweites Modell werden Formeln zur Berechnung des Potentials an der Oberfläche für ein geschichtetes Medium und schließlich für ein Medium mit stetiger Änderung des Widerstandes hergeleitet. Aus den angegebenen Formeln können Ergebnisse, die bereits von früheren Bearbeitern gefunden wurden, als Spezialfälle erhalten werden. Eine für die Praxis verwertbare Zusammenstellung will Verf. an anderer Stelle mitteilen.

W. Kertz.

Marussi, Antonio: Sulla struttura locale del geoide, e sui mezzi geometrici e meccanici atti a determinarla. Ann. Triestini, Sez. II 18, 41—69 (1949).

Die dynamische Struktur eines Newtonschen Potentialfeldes W ist in der Umgebung eines Punktes P bekannt, wenn bekannt sind der skalare Wert W_0 , der Vektor $g = \text{grad } W = dW/dP$ und der Tensor $\mathfrak{B} = d^2W/dP^2$. Diese Elemente gestatten auch die geometrische Struktur des Feldes zu bestimmen, d. h. den Tensor $\sigma = dn/dP$, wo n der normale Versor der Aquipotentialfläche (Tangente der Kraftlinie) ist. Die Beziehung zwischen \mathfrak{B} und σ bzw. n abzuleiten, ist das erste Ziel der vorliegenden Arbeit. Die Darstellung von σ durch g und \mathfrak{B} gestattet diejenige der geometrischen Elemente der Aquipotentialflächen und der Kraftlinien, wie der Hauptkrümmungsradien, der mittleren und der Gaußschen Krümmung und des Azimutes der geodätischen Parallel- und Meridiankreise, der Krümmungslinien und der Schmiegeebene

der Kraftlinien, endlich der Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung der Aquipotentialflächen. Geodätisch-geophysische Anwendungen folgen. Die Ergebnisse sind teilweise, wohl in anderer Form, in Arbeiten von P. Pizzetti, C. Mineo, V. Reina, A. Viterbi u. a. enthalten. *Otto Volk.*

Jeffreys, Harold: *Dynamic effects of a liquid core.* Monthly Not. Roy. astron. Soc. **109**, 670—687 (1949).

Die Wirkung der Trägheit des Erdkernes auf die Bewegungen des Erdkörpers wird untersucht. Es zeigt sich, daß für das Problem der Gezeiten der festen Erde die früheren Berechnungen, bei denen die Erde als einheitlicher fester Körper angesehen wurde, keine wesentliche Abänderung erfahren. Korrekturen sind erforderlich bei der Behandlung der lunaren Nutation und der Breitenschwankungen, allgemeiner: bei Problemen, die Terme der Form zx und zy (z -Achse = Rotationsachse) im Gezeitenpotential enthalten. Für diese wird eine neue Theorie entwickelt, der ein Wiechertsches Erdmodell zugrunde liegt. Nimmt man an, daß der Kern flüssig und die Schale fest und starr ist, so wird die Periode der Breitenschwankungen gegen die frühere Theorie verkürzt. Das stimmt aber nicht mit den Beobachtungen überein. Der Widerspruch löst sich, wenn man für die Rigidität der Schale den auch aus seismischen Beobachtungen folgenden Wert von $1,9 \cdot 10^{12}$ dyn cm⁻² einsetzt. Die Amplitude der lunaren Nutation wird durch Annahme des flüssigen Kernes verkleinert. Diese Korrektur paßt qualitativ zu den Beobachtungen, aber sie ist zu groß. Sie wird kleiner, wenn man der Erdschale Elastizität zubilligt. Noch verbleibende Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung können auf der Ungenauigkeit des verwendeten Wiechertschen Modells beruhen. *W. Kertz.*

Jeffreys, Harold: *Dynamic effects of a liquid core. II.* Monthly Not. Roy. astron. Soc. **110**, 460—466 (1950).

In Ergänzung zum 1. Teil (s. vorsteh. Referat) wird der mögliche Einfluß von Dichteunterschieden im Erdkern auf die Nutationen der Erdachse untersucht. Mit Hilfe eines Näherungsverfahrens wird festgestellt, daß alle möglichen Effekte dadurch erfaßt werden, daß man den wirklichen Kern durch einen homogenen mit dem gleichen Trägheitsmoment ersetzt. *W. Kertz.*

Longuet-Higgins, M. S.: *A theory of the origin of microseisms.* Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A **243**, 1—35 (1950).

Als Hauptursache der Mikroseismik nahm man früher nach Wiechert die Brandung der Meereswellen an Steilküsten an. Neuere Beobachtungen (Deacon, Bernard u. a.) zeigten aber, daß in vielen Fällen der Herd der Mikroseismik mitten im Ozean lag. Die Annahme einer Entstehung durch Meereswellen bereitete Schwierigkeiten, weil für die berechneten Wellen, die aber immer nur in erster Näherung erfaßt wurden, die Druckänderung mit der Tiefe exponentiell abnimmt. In der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, daß ein unendlicher Wellenzug im allgemeinen von einer Druckvariation zweiter Ordnung, die nicht mit der Tiefe abklingt, begleitet ist. Einen kräftigeren Effekt muß man im Falle stehender Wellen, die durch entgegengesetzt laufende Wellenzüge der gleichen Wellenlänge auf dem Meere zustande kommen können, beobachten. Dann ist die entstehende Druckschwingung am Boden proportional zu dem Produkt der Amplituden der entgegengelaufenen Wellen. Sie besitzt die doppelte Frequenz der Einzelwellen (in Übereinstimmung mit den Beobachtungen). Geht man zu endlichen Wellenzügen über, so zeigt sich, daß Druckschwingungen am Meeresboden nur dann auftreten können, wenn das zweidimensionale Frequenzspektrum Wellengruppen derselben Wellenlänge enthält, die in entgegengesetzter Richtung laufen. Solche Verhältnisse können im Zentrum eines (atmosphärischen) Tiefdruckgebietes entstehen. Im zweiten Teil der Arbeit werden dieselben Vorgänge bei Berücksichtigung der Kompressibilität des Wassers untersucht. Es kann dann Resonanz zwischen Meeresboden und freier Oberfläche des Wassers auftreten und dadurch die Wirkung eines Sturmes vergrößert werden. Es wird berechnet, daß ein Sturm über einer Fläche von 1000 qkm im Abstand von 2000 km eine vertikale Bodenbewegung von $6,5 \mu$ erzeugen würde. *W. Kertz.*

Newlands, Margery: *Rayleigh waves in a two-layer heterogeneous medium.* Monthly Not. Roy. astron. Soc., geophys. Suppl. **6**, 109—124 (1950).

Zur Fortführung früherer Arbeiten von Stonely und Jeffreys werden Lösungen für die Differentialgleichung der Rayleighwellen eines inkompressiblen Me-

diums im unendlichen Halbraum gesucht. Dabei soll die Richtigkeit bis zu einer Tiefe von 37,5 km linear zunehmen und darunter konstant sein. Zur numerischen Lösung wird ein Potenzreihenansatz nach einem Parameter der Differentialgleichung gemacht. Die Ergebnisse sind ähnlich wie beim Problem zweier homogener Schichten: Dispersion, ausgeprägtes Minimum der Gruppengeschwindigkeit, wenn die Wellenlänge den doppelten Wert der Schichtdicke der oberen Schicht hat. Beim kompressiblen Medium gibt es ein zweites flaches Minimum bei größeren Wellenlängen. Die Rechenergebnisse werden mit Göttinger Beobachtungen aus den Jahren 1924 und 1930 verglichen. Es wird darauf hingewiesen, daß sich die Rechnungen zur Anwendung auf künstliche Bodenruhe (Periode kleiner als 1 sec) eignen. *W. Kertz.*

Rees, M. R.: The equilibrium distribution of the long-period tides over an ocean covering the northern hemisphere. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 3, 80—88 (1950).

Auf Grund einer Arbeit von Brillouin [*C. r. Acad. Sci., Paris* 184, 849 (1927)] wird der Einfluß der durch die Gezeiten hervorgerufenen Änderung des Gravitationsfeldes auf die statische Gleichgewichtsverteilung der langfristigen Gezeiten unter der Annahme berechnet, daß ein Ozean die nördliche Erdhalbkugel und Festland die südliche bedeckt. Die gegenseitige Anziehung des durch die Gezeiten emporgehobenen Wassers kann wie im Fall eines die ganze Erdkugel bedeckenden Ozeans durch denselben Faktor 1,126 am unberichtigten Wasserspiegel berücksichtigt werden. *Joachim Pretsch.*

Ursell, F.: On the theoretical form of ocean swell on a rotating earth. *Monthly Not. Roy. astron. Soc., geophysic. Suppl.* 6, 1—8 (1950).

In der Theorie der Oberflächenwellen auf Wasser bei nichtrotierender Erde stehen sich die Lösungen von Gerstner und Stokes gegenüber. Die Gerstnersche Lösung ist mathematisch einfacher: Teilchen beschreiben Kreisbahnen, das Wellenprofil ist daher eine Trochoide, es findet kein Massentransport statt. Die Bewegung ist aber nicht wirbelfrei. Die Stokessche Lösung hingegen ist wirbelfrei. Daraus folgt notwendig (Lord Rayleigh), daß sie mit Massentransport verbunden ist. In der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, daß auf der rotierenden Erde eine stationäre Wellenbewegung nicht mit Massentransport verbunden sein kann. Die Gerstnersche Lösung erscheint als gute Approximation für Wellenbewegungen auf rotierender Erde. *W. Kertz.*

Woronetz, C.: L'effet de l'échauffement sur l'équilibre d'une masse fluide. *Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math.* 3, 169—190 (1950).

Der Einfluß von Temperaturunterschieden auf die Bewegung von Flüssigkeiten besteht nicht nur im Hinzutreten der Wärmeleitungsgleichung, sondern vor allem in den neu erscheinenden Auftriebskräften infolge der Dichteänderungen. Nach J. Boussinesq [*C. r. Acad. Sci., Paris* 132, 1382—1387 (1901)] kann man weiter mit dem festen Mittelwert der Dichte rechnen, wenn man zusätzliche Auftriebskräfte verhältig den sonstigen Schwerkraften und der Temperaturabweichung annimmt. Diese praktisch bewährte Vereinfachung ist von Riabouchinsky auf Zentrifugalfelder übertragen worden, vom Verf. auf die Bewegung einer Flüssigkeit zwischen koaxialen Zylindern. Hier wendet er sie auf eine Flüssigkeit zwischen konzentrischen Kugelflächen an (Modell der Atmosphäre), wobei er die Zusatzkräfte als Wirkung eines zusätzlichen Druckfeldes darstellt. — Bei nur senkrechten Temperaturgradienten ist dann ein Strömungszustand möglich, welcher einem bei fester Temperatur vorhandenen gleicht. Die Stabilität dieses Zustandes untersucht Verf. nun, indem er die Störungsgleichungen aufstellt und dafür Lösungen mit dem Zeitfaktor $\exp(\sigma t)$ sucht; Negativität von σ bedingt dabei Stabilität. Zuerst wird, nach dem Vorbild von Jeffreys [*Proc. Roy. Soc. London, Sect. A* 118, 99 (1928)] ein Näherungsverfahren angewandt, wo in den höheren von r abhängigen Gliedern das Argument r durch einen Mittelwert ersetzt wird. Die Störungsgleichungen lassen sich nach dieser Vereinfachung durch Besselfunktionen lösen. Zur Behandlung zäher Flüssigkeiten nach den gleichen Grundsätzen ist die zusätzliche Annahme nötig, daß die kinematische Zähigkeit nicht von der Temperatur abhängt, was sie praktisch auch nur in geringem Maße tut. Instabilität des Gleichgewichtes zeigt sich dann nur bei hinreichend schwacher Zähigkeit noch möglich. — Abschließend wird eine strenge Lösung der nicht vereinfachten Störungsgleichungen durch eine

Reihenentwicklung nach Zylinderfunktionen nachgewiesen, doch ist die Verbesserung nur unbedeutend.
Uwe Timm Bödewadt.

Moene, Asmunn: Atmospheric solenoids and sea level pressure variations.
Meteorolog. Ann. 3, Nr. 6, 157—189 (1950).

Verf. berichtet über Ergebnisse seiner Studien der täglichen Wettermeldungen bez. des Zusammenhanges zwischen den Gebieten, welche von Linien gleicher (12 stdg.) Bodendruckänderungen (Isallobaren) begrenzt werden und den isoster-isobarischen Solenoiden, die auftreten, wenn die Flächen gleicher Dichte und gleichen Drucks sich schneiden. — Die Grundlage seiner Methode zur Beurteilung des Wettergeschehens in den mittleren Breiten ist die von ihm abgeleitete „Tendenz“-Gleichung für die zeitliche Bodendruckänderung, die er darstellt durch die Änderung der energetischen Eigenschaften der gesamten Luftsäule oberhalb des Beobachtungsortes und zwar 1. und 2. durch die zeitliche Änderung der potentiellen und der kinetischen Energie, 3. durch eine Größe, die er durch $s \operatorname{div} (p \cdot v)$ ausdrückt — s ist das spezifische Volumen, p der Druck und v die Geschwindigkeit der Luft —, 4. durch die Reibungsarbeit und 5. durch eine Größe, die er als advektives Glied bezeichnet und die die Geschwindigkeit v und den Gradienten der Dichte als Faktor enthält. Das Divergenzglied, in dem die Expansions- und Kompressionsarbeit der betrachteten Luftsäule steckt, sieht Verf. als entscheidend für die Massendivergenz- bzw. konvergenz oberhalb des Beobachtungsortes und damit für das Zustandekommen des Fallens und Steigens des Bodendruckes an. Die beiden ersten Glieder der Tendenzgleichung werden als die Erzeugenden des Divergenzgliedes betrachtet. — Die potentielle Energie wird mit Hilfe der Solenoide untersucht, wodurch Verf. die zeitliche Änderung der potentiellen Energie in „Stärkelinien“, thickness lines, ausdrücken kann, allerdings infolge der für große Atmosphärenhöhen unzulänglichen Beobachtungen nur bei Beschränkung auf die Schicht zwischen 1000 und 500 mb. Die zeitliche Änderung der kinetischen Energie mit Einschluß des Reibungseinflusses wird — angenähert — durch die Isohyphen der 500-mb-Fläche dargestellt. Das advektive Glied wird als durch das Divergenzglied kompensiert angesehen, S. 170. Die Schnittpunkte der zugeordneten Stärkelinien und Isohyphen geben dann nach den Regeln der graphischen Algebra auf Grund der Tendenzgleichung für jeden Ort den Wert der Bodendruckschwankung für den Zeitpunkt, für den die beiden Kurvenscharen berechnet sind, so daß die Isallobaren konstruiert werden können. Wichtig für die angewandte Methode ist die Unterscheidung zwischen thermischer Symmetrie und Asymmetrie. Die erste findet statt, wenn die Zirkulation längs der Stärkelinien gerichtet ist, die zweite, wenn sie eine Komponente senkrecht zu ihnen hat. Verf. leitet ab, daß zu jedem Druckfallgebiet am Boden ein Drucksteiggebiet in der Höhe gehört und findet, daß der Winkel der Verbindungsgeraden der Zentren dieser beiden Gebilde mit der Richtung der Stärkelinien, der infolge der durch die Erddrehung bedingten Trägheitseffekte nach Null strebt, die Schnelligkeit des Umsatzes der potentiellen und der kinetischen Energie und damit das zu erwartende Wetter bestimmt. — Als Beispiele werden die Wetterkarten vom 5.—8. IV. 48, die des 10.—11. VII. und des 1. und 2. V. desselben Jahres mit den dazu gehörigen 12stdg. Tendenzkarten, auf die die jeweiligen Topographien der 500-mb-Fläche und die Stärkelinien des Solenoidfeldes eingetragen sind, behandelt. Sie liefern das Anschauungsmaterial für die drei Fälle der thermischen Symmetrie, der thermischen Asymmetrie und der Zwischensituation. — Verf. bezeichnet seine Studie als einen Versuch, theoretisch die Tatsachen der praktischen Arbeit auf Grund der täglichen Wettermeldungen und zwar mit den täglich in der synoptischen Aerologie verwendeten Begriffen zu deuten. Seine Methode ist wegen der mathematisch-physikalischen Auswertung der aerologischen Befunde beachtlich, erfordert aber Sicherheit und Exaktheit in der Anwendung der graphischen Algebra. *B. Neis.*

Davies, D. R.: Three-dimensional turbulence and evaporation in the lower atmosphere. I. II. Quart. J. Mech. appl. Math. 3, 51—63, 64—73 (1950).

I. Eine vorhergehende Studie (dies. Zbl. 37, 144) behandelte die Verdunstung und die Wasserdampfverteilung in einer strömenden turbulenten Atmosphäre über einer Fläche von parabolischer Gestalt. Die Annahme dieser Form empfahl sich wegen der damit verbundenen Möglichkeit, die Lösungen der auftretenden Differentialgleichungen als bereits tabuliert vorliegende (F -)Funktionen zu erhalten. — In dieser Schrift wird angenommen, daß die Verdunstung über einer rechteckigen Wasserfläche von endlicher Länge und Breite stattfindet und der Luftstrom parallel der Länge des Feuchtigkeitsspenders weht. — Zwecks vorläufiger Lösung wird angenommen, daß die Windgeschwindigkeit und der Diffusionskoeffizient (diffusivity) konstant seien. Durch geeignete Transformation der Koordinaten, die in ähnlicher Weise auch bei der Reduktion von Besselschen Differentialgleichungen von Nutzen ist und zu deren Formgebung ein glücklicher Blick gehört, wird die fundamentale Diffusionsgleichung auf die Form der Wärmeleitungsgleichung mit Umschreibung der Randbedingungen gebracht. Eine weitere plausible Annahme führt auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nur zwei unabhängigen Variablen, und eine neue Transformation auf elliptische Koordinaten führt auf zwei gewöhnliche, zweigliedrige Mathiesche Differentialgleichungen. Diese sind in den Lehrbüchern behandelt, allerdings liegen ausreichende Tabellen noch nicht vor, so daß die vom Verf.

ingeschriebene Lösung nur formalen Wert hat. — Zwecks Verallgemeinerung des Problems werden dann für die Zunahme der Windgeschwindigkeit mit der Höhe und für die Diffusionskoeffizienten empirische Potenzformeln angesetzt. Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Ausgangsgleichung für die Diffusion und Wiederholung der eben angedeuteten mathematischen Operationen erhält Verf. entsprechende, allerdings dreigliedrige Mathiesche Differentialgleichungen, für die eine recht verwickelte Lösung abgeleitet wird, und zwar für die Verdunstung und Wasserdampfverteilung oberhalb des Teiches und in Abhängigkeit von der in Richtung des Windes gemessenen Strecke (down-wind of the lake). — II. Untersuchung des Einflusses einer ständig Schwebeteilchen, z. B. Wasserdampf oder Rauch abgebenden punktförmigen Quelle auf den Zustand einer in turbulenter Strömung begriffenen Luft. Hierzu ist die Kenntnis eines besonders zu bestimmenden Potenzgesetzes notwendig, dessen Ableitung nach Ansicht des Verf. erfordert: 1. Die Annahme eines experimentell gesicherten Gesetzes für die Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit und des vertikalen Diffusionskoeffizienten von der Höhe, 2. die Annahme eines plausiblen Gesetzes für den seitlichen Diffusionskoeffizienten, 3. das Auffinden einer den früheren Untersuchungen entsprechenden Lösung der Diffusionsgleichung bei ständig wirkender punktförmigen Quelle und 4. die Anpassung der theoretisch ermittelten Werte an die durch das Experiment gewonnenen Ergebnisse. — Es handelt sich also u. a. um die Bestimmung des Exponenten der Höhe z des Ausdrucks für die seitliche Diffusion und des Exponenten von x , der die Verteilung des Gehaltes an Schwebeteilchen längs der x -Achse, die peak-concentration, als Funktion des Abstandes von der in ihr liegenden Punktquelle zu bestimmen. Die Rechnungen, die im Prinzip aus der gleichen geistigen Schau wie bei den andern hier besprochenen Arbeiten des Verf. fließen, führen ihn zu dem Schluß, daß für den seitlichen Diffusionskoeffizienten dasselbe Potenzgesetz wie bei den vertikalen gilt und daß für den Exponenten von x die Zahl $-1,76$ zu setzen ist, Ergebnisse, die an sich plausibel sind. — Für die theoretische Meteorologie sind die Gedankengänge des Verf. durchaus Neuland, das aber zur Aufstellung des für unser Wirtschaftsleben überaus wichtigen vollständigen Wasserhaushalts der Erde dringend der Bearbeitung bedarf.

B. Neis.

Gutman, L. N.: Über thermische Störungen in der Horizontalströmung der Luft. Priklad. Mat. Mech. 14, 277—286 (1950) [Russisch].

Verf. bezieht sich auf seine früheren Arbeiten betr. konvektive Bewegungen, die durch eine stationäre Wärmequelle in ruhender Luft erzeugt werden, und untersucht mathematisch-physikalisch die Störung, die eine konstante horizontale Luftströmung mit der Geschwindigkeit U durch eine konstante, in ihr befindliche Wärmequelle erleidet und zwar im ersten Teil der Ausführungen bei laminarer, im zweiten Teil bei turbulenter Hauptströmung. Der Ausgangspunkt seiner Überlegungen ist ein System von partiellen Differentialgleichungen, das er dem Werk von L. Landau und E. Siošiz, Mechanik der kontinuierlichen Mittel, Gostechizdat, 1944 entnimmt. — Wegen der Bedeutung der Studie für naheliegende Anwendungen auf fundamentale geophysikalische, besonders meteorologische Fragen soll dieses System hier hingeschrieben werden.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \lambda \rho_0 T; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Die verwendeten Symbole haben die übliche Bedeutung; p, T sind die Abweichungen des Drucks und der Temperatur von ihren Werten in ungestörter Strömung, ν, κ die Koeffizienten der Zähigkeit und Temperaturleitfähigkeit der Luft, in $\lambda = g \cdot \beta$ ist g die Schwerkbeschleunigung und β der Ausdehnungskoeffizient der Luft. Dieses System wird noch durch die Gleichung für

die Ergiebigkeit der Wärmequelle $c_p \cdot \rho_0 \cdot Q = \text{const.}, Q = \int_{-\infty}^{+\infty} u T dz$ erweitert. — Eine Be-

gründung der Zulässigkeit dieser Gleichungen findet nicht statt. Es sei deshalb bemerkt, daß die erste Gleichung die Navier-Stokessche Gleichung für stationäre Strömung in Richtung der x -Achse, die zweite die Gleichung der Wärmeleitung, die dritte die der Schwankung der Druckänderung mit der Höhe und die vierte die Kontinuitätsbedingung und zwar für inkompressible Flüssigkeiten ausdrückt. „Betrachtet man Volumenänderungen von 1% als vernachlässigbar, so darf man bei Strömungen atmosphärischer Luft von gewöhnlicher Temperatur die Formeln für volumenbeständige Strömung anwenden für Geschwindigkeiten des Gases bis zu rund 50 m/sec und für Höhenausdehnungen bis zu 100 m“ (L. Prandtl, Strömungslehre, 5. Aufl. Braunschweig 1949, dies. Zbl. 31, 133). Die Verwendung der Gleichung 4 ist also unbedenklich. Alle Schlußfolgerungen entsprechen jedoch der Wirklichkeit nur innerhalb der Zulässigkeit der hier gemachten Voraussetzungen und Einschränkungen. — Verf. erreicht nun eine Lösung des Gleichungssystems 1.) durch Einführung der Stromfunktion ψ , 2.) durch Darstellung der gesuchten Funktionen ψ, T und p durch Produkte $\psi = 2\sqrt{\nu U x} \cdot \varphi(\eta), \quad T = \frac{Q}{2\sqrt{\nu U x}} \cdot \delta(\eta),$

$p = \frac{\lambda Q_0 Q}{U} \cdot P(\eta)$ mit $\eta = \frac{z}{2} \cdot \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$. Hier sind φ , ϑ , P nunmehr die gesuchten Funktionen.

Das Verfahren hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der Bernoulli-Methode der Lösung der Wellengleichung; 3.) durch Festlegung der Randbedingungen. Die Bestimmung dieser gesuchten Funktionen auf Grund des ursprünglichen Gleichungssystems führt dann auf gewöhnliche Differentialgleichungen, für deren Lösung Reihen angesetzt werden, deren Koeffizientenbestimmung in der üblichen Weise erfolgt, die aber nach dem zweiten Gliede wegen der Kleinheit

der sich ergebenden Größen abgebrochen werden kann. — Das Ergebnis ist $\vartheta_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2}$

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2\pi} e^{-\eta^2} \cdot \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta', \quad \varphi_1' = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \eta \cdot e^{-\eta^2}, \quad \varphi_1 = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2}, \quad P = \int_{-\infty}^\eta \vartheta d\eta, \quad u = U(1 + \alpha \varphi_1'),$$

$w = \alpha \sqrt{\frac{U\nu}{x}} (\eta \varphi_1' - \varphi_1)$, wo $\alpha = \frac{\lambda Q}{U^3}$ ist. Graphische Darstellungen veranschaulichen die

Rechnung und geben ein Bild von der Lage der Isothermen in der gestörten Strömung, von der Verteilung der thermischen Störung der Hauptströmung längs der Vertikalen z und von der Verteilung der vertikalen Geschwindigkeit längs z . — Die für u und w gefundene Abhängigkeit gilt für den durchströmten Raum unterhalb und oberhalb der Wärmequelle. Eine Beschränkung nur auf den Raum oberhalb der Wärmequelle, die für die vom Boden aus geheizten Strömungen sehr wichtig ist, führt Verf. nicht durch. — In der Untersuchung der turbulenten Hauptströmung werden in den beiden ersten Gleichungen des Ausgangssystems auf der rechten Seite das Viskositäts- bzw. das Wärmeleitungsglied durch einen Ausdruck für die turbulente Reibung bzw. für die turbulente Wärmeleitung ersetzt und zwar mittels Einführung der Funktionen τ und q , die „von der Wechselbeziehung zwischen den Pulsationen der Geschwindigkeit und der Temperatur abhängen und welche die turbulente Reibung bzw. den turbulenten Wärmetransport charakterisieren“. Die Geschwindigkeit u wird als Summe der Geschwindigkeit U und des Turbulenzgliedes u' eingeführt, und τ und q werden durch den Prandtl'schen Ausdruck für die mittlere freie Weglänge ersetzt. Die Aufeinanderfolge der mathematischen Schlüsse ist dann ähnlich der bei der laminaren Hauptströmung, nur daß statt der Stromfunktion die Größe u' gesetzt und diese durch eine Funktion $v(\xi)$ mit dem Faktor $\frac{\lambda Q}{2 \kappa^2 a^3}$ ausgedrückt und als Argu-

ment der gesuchten Funktionen v , ϑ , P die Größe $\xi = \frac{U a z}{x (\lambda Q c^2)^{1/2}}$ genommen wird. Hier bedeutet c eine Konstante, die den Turbulenzgrad der Hauptströmung charakterisiert; die Konstante a hängt mit der Größe der Wärmequelle zusammen. Die Rechnungen sind natürlich noch umfangreicher als im laminaren Fall. — Die Verteilung der horizontalen und vertikalen Störungen in der turbulenten Hauptströmung ergeben sich als nur graduell verschieden von der laminaren. Das Temperaturfeld zeigt jedoch über der Wärmequelle eine deutliche Diskontinuität. — Die Studie kann in methodischer und inhaltlicher Hinsicht als Muster für die Behandlung meteorologischer Probleme bezeichnet werden. Auch bei diesen sucht man im gegenwärtigen Stadium der Entwicklung der Lösung der in ihnen auftretenden Systeme von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen und der durch die Nichtlinearität gegebenen mathematischen Schwierigkeit durch eine fiktive Vereinfachung der natürlichen Erscheinungen einerseits und durch getrennte Behandlung des Umsatzes der Strahlungsenergie der Sonne in die verschiedenen Energiearten der bewegten Atmosphäre näherzukommen. — Zu den Vereinfachungen gehören wie in der vorliegenden Arbeit die Annahme der Kontinuität und der Stationarität der im bewegten Zustand befindlichen irdischen Lufthülle. Bei dieser Sachlage hängt aller Fortschritt von der Intuition des Mathematiker-Physiker-Meteorologen ab, das ganze Wettergeschehen in eine Zahl von simultan ablaufende, durch einfache Systeme von Differentialgleichungen zu beschreibende Energieumsatzprozesse aufzulösen, durch deren Integration die Umwandlung der einzelnen Energien in der Zeit zu verfolgen und schließlich die Einzelprozesse zu einem Gesamtbild zu vereinigen. Eine der Fundamentalaufgaben hierbei ist aber die Erforschung des Einflusses einer Wärmequelle auf eine bereits bestehende turbulente Strömung. B. Neis.

Rydbeck, O. E. H.: Magnetoionic triple splitting of ionospheric waves. J. appl. Phys. 21, 1205—1214 (1950).

Johnson, Martin: The meanings of time and space in philosophies of science. Advancement Sci. 7, 307—314 (1950).

Diskussion der neueren kosmologischen Spekulationen unter dem Gesichtspunkt des Zeitbegriffs. C. F. v. Weizsäcker.

Pierucci, Mariano: Eliminazione di un apparente disaccordo nella determinazione del raggio dell'universo. Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena 4, 26—29 (1950).